

2005학년도 대학수학능력시험

제 2 교시

수리영역 정답과 풀이

‘가’형

1

·출제 단위: 수학 I - I. 지수와 로그

·출제 의도: 지수의 계산을 할 수 있다.

·평가 요소: 계산능력

·풀이:

$$\begin{aligned} & 3^{\frac{2}{3}} \times 9^{\frac{3}{2}} \div 27^{\frac{8}{9}} \\ &= 3^{\frac{2}{3}} \times 3^3 \div 3^{\frac{8}{3}} \\ &= 3^{\frac{2}{3} + 3 - \frac{8}{3}} \\ &= 3 \end{aligned}$$

답 ③

2

·출제 단위: 수학 I - II. 행렬

·출제 의도: 역행렬을 구할 수 있다.

·평가 요소: 계산능력

·풀이:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \text{에서}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{1 \times 5 - 2 \times 2} \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} AX = B &\Leftrightarrow X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 8 & -11 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

, 행렬 X 의 모든 성분의 합은

$$8 + (-11) + (-3) + 4 = -2$$

답 ①

3

·출제 단위: 수학 II - I. 방정식과 부등식

·출제 의도: 연립분수방정식을 풀 수 있다.

·평가 요소: 이해능력

·풀이:

$$\frac{x+2}{x^2-4x+3} = \frac{x+2}{(x-1)(x-3)} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (x+2)(x-1)(x-3) \geq 0, (x-1)(x-3) \neq 0$$

$$\therefore -2 \leq x < 1, x > 3 \quad \cdots \cdots \textcircled{7}$$

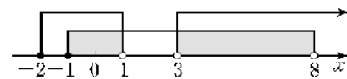
$$\frac{9}{x-8} \leq -1 \Leftrightarrow \frac{9}{x-8} + 1 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x+1}{x-8} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow (x+1)(x-8) \leq 0, x-8 \neq 0$$

$$\therefore -1 \leq x < 8 \quad \cdots \cdots \textcircled{8}$$

⑦, ⑧의 범위를 그림으로 나타내면



따라서, 만족하는 정수 $x = -1, 0, 4, 5, 6, 7$ 의 6개다.

답 ⑤

4

·출제 단위: 수학 II - III. 다항함수의 미분법

·출제 의도: 속도, 위치의 변화량에 대하여 이해한다.

·평가 요소: 이해능력

·풀이:

‘가’ 지점에서 ‘나’ 지점까지의 거리를 s 라 하면

$$\therefore A \text{의 평균속도는 } \frac{s}{40-0}$$

$$C \text{의 평균속도는 } \frac{s}{40-0}$$

∴ 참

ㄴ. B 의 그래프에서 접선의 기울기가 0인 순간은 한 번, C 의 그래프에서 접선의 기울기가 0인 순간은 세 번 있다.

∴ 참

ㄷ. A, B, C 속도의 그래프와 t 축으로 둘러싸인 영역의 넓이는 $\int_0^t |v| dt = \int_0^t v dt$ 이므로 위치의 변화량을 나타낸다.

그런데, A, B, C 모두 '가' 지점에서 출발하여 '나' 지점에 도착했으므로 위치의 변화량은 모두 같다.

∴ 참

답 ⑤

5

- 출제 단위: 수학 I - I. 지수와 로그
- 출제 의도: 지수와 로그의 계산을 할 수 있다.
- 평가 요소: 계산능력
- 풀이:

$$\begin{aligned} \neg. & 2^{\log_2 1 + \log_2 2 + \log_2 3 + \dots + \log_2 10} \\ &= 2^{\log_2 (1 \cdot 2 \cdot 3 \dots 10)} = 2^{\log_2 10!} = (10!)^{\log_2 2} \\ &= (10!)^1 = 10! \end{aligned}$$

따라서, 옳다.

$$\begin{aligned} \neg. & \log_2 (2^1 \times 2^2 \times 2^3 \times \dots \times 2^{10})^2 \\ &= \log_2 2^{2(1+2+3+\dots+10)} \\ &= \log_2 2^{110} = 110 \end{aligned}$$

따라서, 옳지 않다.

$$\begin{aligned} \neg. & (\log_2 2^1) (\log_2 2^2) (\log_2 2^3) \dots (\log_2 2^{10}) \\ &= 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots 10 = 10! \end{aligned}$$

, 옳지 않다.

답 ①

6

- 출제 단위: 수학 II - VII. 벡터
- 출제 의도: 평면의 방정식을 세울 수 있다.
- 평가 요소: 내적 문제해결능력
- 풀이:

평면 α 와 직선 $l: x-1 = \frac{y-2}{-2} = \frac{z-3}{3}$ 이 수직이므로

평면 α 의 법선벡터 $\vec{h} = (1, -2, 3)$ 이고

점 $A(1, 2, 3)$ 을 지나므로

α 의 방정식은

$$1(x-1) + (-2)(y-2) + 3(z-3) = 0$$

$$\therefore x - 2y + 3z - 6 = 0$$

직선 m 위의 임의의 점은

$$m: x-2 = y = \frac{z-6}{5} = t \text{라 하면}$$

$$(t+2, t, 5t+6)$$

직선 m 위의 점 B 가 평면 α 위에 있으므로

$$(t+2) - 2t + 3(5t+6) - 6 = 0, 14t + 14 = 0$$

$$\therefore t = -1$$

따라서, $B(1, -1, 1)$

$$\begin{aligned} \therefore \overline{AB} &= \sqrt{(1-1)^2 + (-1-2)^2 + (1-3)^2} \\ &= \sqrt{13} \end{aligned}$$

답 ④

7

- 출제 단위: 수학 II - VII. 벡터
- 출제 의도: 벡터를 이용하여 삼각형의 넓이를 구할 수 있다.
- 평가 요소: 내적 문제해결능력
- 풀이:

오른쪽 그림과 같이 E 를

원점 O 로 하는

좌표공간에서

세 점 P, Q, R 의 좌표는

$$P(0, 2, 3)$$

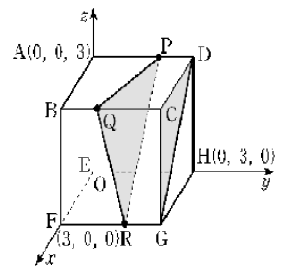
$$Q(3, 1, 3)$$

$$R(3, 2, 0)$$

$$\therefore \overrightarrow{PQ} = (3, -1, 0), \overrightarrow{PR} = (3, 0, -3)$$

이 때, 두 벡터 $\overrightarrow{PQ}$ 와 $\overrightarrow{PR}$ 가 이루는 각의 크기를 α 라 하면

$$\cos \alpha = \frac{\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{PR}}{|\overrightarrow{PQ}| |\overrightarrow{PR}|} = \frac{9}{\sqrt{10} \sqrt{18}} = \frac{3\sqrt{5}}{10}$$



+++++

$$\therefore \sin \alpha = \sqrt{1 - \left(\frac{3\sqrt{5}}{10}\right)^2} = \frac{\sqrt{55}}{10} \quad \left(\because 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\begin{aligned} \therefore \Delta PQR &= \frac{1}{2} |\overrightarrow{PQ}| |\overrightarrow{PR}| \sin \alpha \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{10} \sqrt{18} \times \frac{\sqrt{55}}{10} \\ &= \frac{3\sqrt{11}}{2} \end{aligned}$$

ΔPQR 의 평면 CGHD 위로의 정사영이 ΔDCG 이므로

$$\cos \theta = \frac{\Delta DCG}{\Delta PQR} = \frac{\frac{1}{2} \times 3 \times 3}{\frac{3\sqrt{11}}{2}} = \frac{3\sqrt{11}}{11}$$

답 ⑤

8

·출제 단위: 수학 II-III, IV. 미분법, 적분법

·출제 의도: 미분계수, 평균변화율, 정적분의 의미를 이해한다.

·평가 요소: 이해 능력

·풀이:

ㄱ. $F'(x) = f(x) > 0$ 이므로 구간 $[a, b]$ 에서 $y = F(x)$ 는 증가한다.

$\therefore$ 참

ㄴ. 직선 PQ의 기울기는

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{F'(b) - F'(a)}{b - a}$$

$\therefore$ 거짓

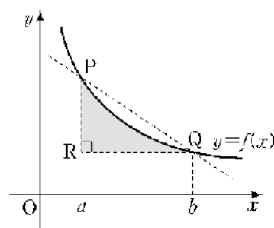
$$\text{ㄷ. } \int_a^b \{f(x) - f(b)\} dx$$

= (오른쪽 그림의 어두운 부분의 넓이)

$$\frac{(b-a) \{f(a) - f(b)\}}{2}$$

= (ΔPRQ 의 넓이)

$\therefore$ 참



답 ③

9

·출제 단위: 수학 I-VII. 확률과 통계

·출제 의도: 경우의 수를 구할 수 있다.

·평가 요소: 이해능력

·풀이:

키가 작은 사람부터 큰 사람 순으로 a, b, c, d 라 하자.

① ② ③ ④

(i) a 3번 자리에 오는 경우 $\Rightarrow 3!$ (가지)

(ii) b 가 3번 자리에 오는 경우 $\Rightarrow a$ 는 1번 자리에 와야 하므로 $2!$ (가지)

$$\text{따라서, 구하는 확률은 } \frac{3! + 2!}{4!} = \frac{8}{24} = \frac{1}{3}$$

답 ①

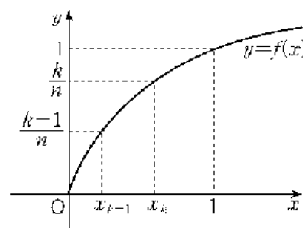
10

·출제 단위: 수학 II-IV. 다항함수의 적분법

·출제 의도: 역함수의 대응 관계, 구분구적법에 의한 정적분의 정의를 이해한다.

·평가 요소: 내적 문제해결능력

·풀이:



위의 그림에서

$$f(x_k) = \frac{k}{n} \Leftrightarrow g\left(\frac{k}{n}\right) = x_k$$

$$f(x_{k-1}) = \frac{k-1}{n} \Leftrightarrow g\left(\frac{k-1}{n}\right) = x_{k-1}$$

이므로 $x_k - x_{k-1} = \Delta x$ 로 놓고 주어진 식의 값을 구하면

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left\{ g\left(\frac{k}{n}\right) - g\left(\frac{k-1}{n}\right) \right\} \frac{k}{n}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n (x_k - x_{k-1}) \cdot f(x_k)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(x_k) \Delta x$$

$$= \int_0^1 f(x) dx$$

답 ③

+++++

11

·출제 단위: 수학 I - III. 수열

·출제 의도: 수열과 관련된 가우스 함수의 계산을 할 수 있다.

·평가 요소: 내적 문제해결능력

·풀이:

$$\neg. \left[\frac{n}{k} \right] = 1 \text{에서}$$

$$1 \leq \frac{n}{k} < 2$$

$$k \leq n < 2k$$

$$\therefore \frac{n}{2} < k \leq n$$

따라서, k 의 개수가 항의 개수이므로

$$\text{항의 개수는 } n - \frac{n}{2} = \frac{n}{2} = \left[\frac{n+1}{2} \right]$$

따라서, 참이다.

$$\sqcup. \left[\frac{100}{k} \right] = 3 \text{에서}$$

$$3 \leq \frac{100}{k} < 4$$

$$3k \leq 100 < 4k$$

$$\therefore 25 < k \leq 33.33\cdots$$

즉, $33 - 25 = 8$ (개)이다. 따라서, 참이다.

$$\sqsubset. \left[\frac{n}{3} \right] = 5 \text{에서}$$

$$5 \leq \frac{n}{3} < 6$$

$$15 \leq n < 18$$

즉, $18 - 15 = 3$ (개)이다.

따라서, 거짓이다.

답 ④

12

·출제 단위: 수학 I - III. 수열

·출제 의도: 수학적귀납법을 이해하고 있다.

·평가 요소: 추론능력

·풀이:

$$\sum_{i=1}^{2n+1} \frac{1}{n+i} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{3n+1} > 1$$

$$(1) \ n=1 \text{일 때, } a_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{13}{12} > 1$$

(2) $n=k$ 일 때, $a_k > 1$ 이라 가정하면

$$a_k = \frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2} + \cdots + \frac{1}{3k+1} > 1$$

$n=k+1$ 일 때,

$$a_{k+1}$$

$$= \frac{1}{k+2} + \frac{1}{k+3} + \cdots + \frac{1}{3k+4}$$

$$= a_k + \left(\frac{1}{3k+2} + \frac{1}{3k+3} + \frac{1}{3k+4} \right) - \boxed{\frac{1}{k+1}}$$

한편, $(3k+2)(3k+4) < (3k+3)^2$

$$\frac{1}{3k+2} + \frac{1}{3k+4} = \frac{6k+6}{(3k+2)(3k+4)} > \frac{6k+6}{(3k+3)^2} = \frac{2}{3k+3}$$

$$\therefore \frac{1}{3k+2} + \frac{1}{3k+4} > \boxed{\frac{2}{3k+3}}$$

$a_k > 1$ 이므로

$$a_{k+1} > a_k + \left(\frac{1}{3k+3} + \frac{2}{3k+3} \right) - \frac{1}{k+1} > 1$$

그러므로 (1), (2)에 의하여 모든 자연수 n 에 대하여 $a_n > 1$ 이다.

답 ②

13

·출제 단위: 수학 II - III. 다항함수의 미분법

·출제 의도: 극대, 극소의 판정과 방정식의 실근의 의미를 이해한다.

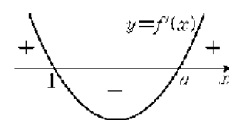
·평가 요소: 이해능력

·풀이:

$$f(x) = 2x^3 - 3(a+1)x^2 + 6ax - 4a + 2 \text{에서}$$

$$f'(x) = 6x^2 - 6(a+1)x + 6a$$

$$= \boxed{6(x-a)(x-1)} \leftarrow (\text{가})$$



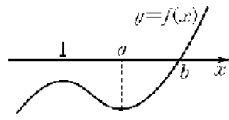
$a > 1$ 이므로 함수 $f(x)$ 는 $x=1$ 에서
 극대값을 가진다.

▲ (나)

그런데 $f(1) = -a + 1 < 0$ 이고,
 $f(b) = 0$ 이므로

오른쪽 그림과 같이 $a < b$

▲ (다)



답 ④

14

·출제 단위: 수학 I - VI. 순열과 조합

·출제 의도: 경우의 수를 구할 수 있다.

·평가 요소: 이해능력

·풀이:

a 를 기준으로 □ 안에 b 가 들어갈 수를 생각해 보자.

(i) 첫째 자리에 b 가 오는 경우

$$(b) a \square a \square a \square a \square a \square a \square a$$

마지막 자리에는 a 가 와야 하므로

$${}_7C_3 = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 35(\text{가지})$$

(ii) 첫째 자리에 b 가 오지 않는 경우

$$a \square a \square a \square a \square a \square a \square a \square$$

$${}_8C_4 = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 70(\text{가지})$$

(i), (ii)에서 $35 + 70 = 105(\text{가지})$

답 ②

15

·출제 단위: 수학 II - VII. 벡터

·출제 의도: 벡터의 의미를 이해하고 활용할 수 있다.

·평가 요소: 내적 문제해결능력

·풀이:

벡터 $\frac{1}{2}(\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB})$ 는 두 점 $A(3, 1, 1)$,

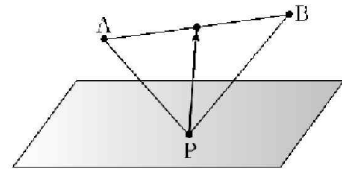
$B(1, -3, -1)$ 의 중점을 나타내는
 위치벡터이므로

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB}) &= \frac{1}{2}((3, 1, 1) + (1, -3, -1)) \\ &= (2, -1, 0) \end{aligned}$$

$\frac{1}{2}|\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB}|$ 의 최소값은 선분 AB 의 중점에서
 평면까지의 거리 d 이므로

$|\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB}|$ 의 최소값 m 은

$$m = 2d = \frac{2|2+1+0|}{\sqrt{1+1+1}} = \frac{6}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}$$



답 ③

16

·출제 단위: 수학 I - VII. 확률과 통계

·출제 의도: 이항분포를 정규분포를 이용하여 풀 수 있다.

·평가 요소: 내적 문제해결능력

·풀이:

C회사 제품을 선택할 확률은 $\frac{25}{100} = \frac{1}{4}$ 이므로

$B(192, \frac{1}{4})$ 을 따른다. 이 때, 192는 충분히 큰
 수이므로 정규분포로 근사시키면

$$m = 192 \times \frac{1}{4} = 48, \quad \sigma^2 = 192 \times \frac{1}{4} \times \frac{3}{4} = 36$$

즉, $N(48, 6^2)$ 이 된다.

$$\begin{aligned} \therefore P(X \geq 42) &= P\left(Z \geq \frac{42-48}{6}\right) \\ &= P(Z \geq -1) \\ &= 0.5 + P(0 \leq Z \leq 1) \\ &= 0.5 + 0.3413 = 0.8413 \end{aligned}$$

답 ⑤

17

·출제 단위: 수학 I - I. 지수와 로그

·출제 의도: 복리법의 개념을 이해하고 있다.

·평가 요소: 외적 문제해결능력

·풀이:

n 년 후의 총 인구를 S_n , 65세 이상의 인구를 T_n 이라 하면

$$S_n = 1000 \times (1 + 0.003)^n \text{ (만 명)}$$

$$T_n = 50 \times (1 + 0.04)^n \text{ (만 명)}$$

초고령화 사회로 진입하는 시기는

$$\frac{T_n}{S_n} = \frac{50 \times 1.04^n}{1000 \times 1.003^n} \geq 0.2 \text{에서}$$

$$\frac{1.04^n}{1.003^n} \geq 4$$

부등식의 양변에 상용로그를 취하면

$$n(\log 1.04 - \log 1.003) \geq 2 \log 2$$

$$(0.0170 - 0.0013)n \geq 2 \times 0.3010$$

$$\therefore n \geq \frac{0.6020}{0.0157} \div 38.34$$

따라서, ② 2038~2040년에 초고령화 사회가 예측된다.

답 ②

18

·출제 단원: 수학 II - II. 함수의 극한과 연속성

·출제 의도: 극한의 부정형 계산을 할 수 있다.

·평가 요소: 계산능력

·풀이:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x^2 + a} - b}{x - 2} = \frac{2}{5}$$

$x \rightarrow 2$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이므로 $\frac{2}{5}$ 에 수렴하려면

(분자) $\rightarrow 0$ 이어야 한다. 즉,

$$\sqrt{4 + a} - b = 0 \quad \therefore b = \sqrt{4 + a}$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x^2 + a} - \sqrt{4 + a}}{x - 2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{(x - 2)(\sqrt{x^2 + a} + \sqrt{4 + a})}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x + 2}{\sqrt{x^2 + a} + \sqrt{4 + a}}$$

$$= \frac{4}{2\sqrt{4 + a}} = \frac{2}{\sqrt{4 + a}} = \frac{2}{5}$$

$$\therefore \sqrt{4 + a} = 5$$

$$4 + a = 25$$

$$\therefore a = 21, b = 5 \quad \therefore a + b = 26$$

답 26

19

·출제 단원: 수학 I - I. 지수와 로그

·출제 의도: 로그부등식을 풀 수 있다.

·평가 요소: 계산능력

·풀이:

$$\begin{cases} \log_3 |x - 3| < 4 & \dots \textcircled{1} \\ \log_2 x + \log_2 (x - 2) \geq 3 & \dots \textcircled{2} \end{cases}$$

①에서 $x \neq 3$ 이고

$$|x - 3| < 3^4, -81 < x - 3 < 81,$$

$$-78 < x < 84 \quad (x \neq 3) \dots \textcircled{7}$$

②에서

$$\log_2 x(x - 2) \geq 3$$

$$x(x - 2) \geq 2^3$$

$$x^2 - 2x - 8 \geq 0$$

$$(x - 4)(x + 2) \geq 0$$

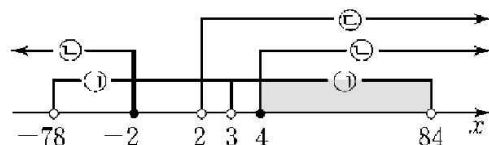
$$\therefore x \leq -2 \text{ 또는 } x \geq 4 \dots \textcircled{8}$$

진수는 양수이므로

$$x > 0 \text{이고 } x - 2 > 0$$

$$\therefore x > 2 \dots \textcircled{9}$$

⑦, ⑧, ⑨의 공통 범위를 구하면



$$\therefore 4 \leq x < 84$$

따라서, 정수 x 의 개수는 $84 - 4 = 80$

답 80

20

- 출제 단위: 수학 II - I. 방정식과 부등식
- 출제 의도: 치환에 의한 무리방정식을 풀 수 있다.
- 평가 요소: 이해능력
- 풀이:

$$x^2 + 7x + 10 + \sqrt{x^2 + 7x + 12} = 0 \text{에서}$$

$$x^2 + 7x + 10 = t \text{로 놓으면}$$

$$t + \sqrt{t+2} = 0$$

$$\sqrt{t+2} = -t$$

$$t+2 = t^2$$

$$t^2 - t - 2 = 0$$

$$(t-2)(t+1) = 0 \quad \therefore t=2 \text{ 또는 } t=-1$$

그런데 $t=2$ 는 무리근이므로

$$t = -1$$

$$x^2 + 7x + 10 = -1 \text{에서}$$

$$x^2 + 7x + 11 = 0$$

따라서 $D = 49 - 44 > 0$ 이므로 방정식 $x^2 + 7x + 11 = 0$ 은 두 실근을 가지고 두 실근의 곱은 근과 계수의 관계에 의하여 11이다.

21

- 출제 단위: 수학 II - VI. 벡터
- 출제 의도: 구의 방정식과 직선의 방정식을 이해하여 도형의 넓이를 구할 수 있다.
- 평가 요소: 내적 문제해결능력
- 풀이:

$$\frac{x}{2} = y = -z = t \text{로 놓으면}$$

$$x = 2t, y = t, z = -t$$

이것을 구의 방정식 $x^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 8$ 에 대입하면

$$4t^2 + (t-1)^2 + (-t-1)^2 = 8$$

$$6t^2 + 2 = 8$$

$$t^2 = 1 \quad \therefore t = \pm 1$$

따라서 직선

$$\frac{x}{2} = y = -z \text{가 만나는 두}$$

점 A, B의 좌표는 각각

$$A(2, 1, -1)$$

$$B(-2, -1, 1)$$

$$\overline{AB} = \sqrt{16 + 4 + 4} = 2\sqrt{6}$$

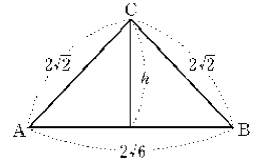
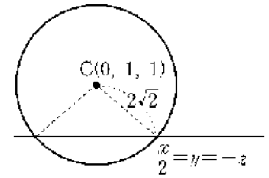
삼각형 CAB의 높이를 h

라 하면

$$h = \sqrt{8 - 6} = \sqrt{2}$$

$$S = \frac{1}{2} \times \sqrt{2} \times 2\sqrt{6} = 2\sqrt{3}$$

$$\therefore S^2 = 12$$



22

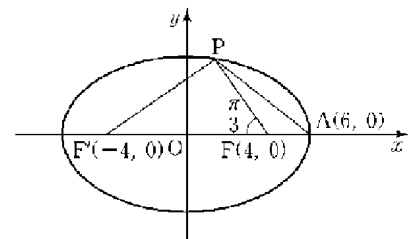
- 출제 단위: 수학 II - V. 이차곡선과 공간도형
- 출제 의도: 타원의 방정식의 정의를 이용하여 문제를 해결할 수 있다.
- 평가 요소: 내적 문제해결능력
- 풀이:

$$\text{타원의 방정식 } \frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{20} = 1 \text{에서}$$

$$a^2 - b^2 = 36 - 20 = 16$$

이므로 두 초점 F, F'의 좌표는 각각

$$F(4, 0), F'(-4, 0)$$



$\overline{PF} = t$ 로 놓으면 타원의 정의에 의하여

$\overline{PF'} = 12 - t$ 이므로 $\triangle PFF'$ 에서 제이코사인법칙을 이용하면

$$(12 - t)^2 = t^2 + 8^2 - 2 \cdot 8 \cdot t \cdot \cos \frac{\pi}{3}$$

$$t^2 - 24t + 144 = t^2 + 64 - 8t$$

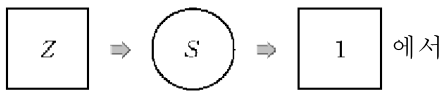
$$16t = 80, t = 5$$

또, $\triangle PFA$ 에서 $\angle PFA = \frac{2}{3}\pi$ 이므로

$$\begin{aligned}\overline{PA}^2 &= 2^2 + 5^2 - 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot \cos \frac{2}{3}\pi \\ &= 4 + 25 + 10 = 39\end{aligned}$$

23

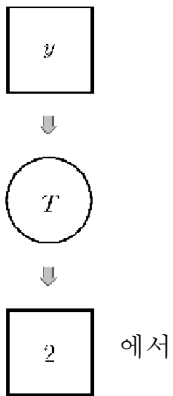
- 출제 단위: 수학 I - IV. 수열의 극한
- 출제 의도: 주어진 기호들을 이해하고 계산할 수 있다.
- 평가 요소: 추론능력
- 풀이:



$$1 = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{z}\right)^n = \frac{\frac{1}{z}}{1 - \frac{1}{z}} = \frac{1}{z-1}$$

$$\left(\because z > 1 \text{이므로 } \left|\frac{1}{z}\right| < 1\right)$$

즉, $z-1=1$ 에서 $z=2$



$$2 = 16^y \therefore y = \frac{1}{4}$$



$$\frac{1}{4} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{x}\right)^n = \frac{\frac{1}{x}}{1 - \frac{1}{x}} = \frac{1}{x-1}$$

$$\left(\because x > 1 \text{이므로 } \left|\frac{1}{x}\right| < 1\right)$$

즉, $x-1=4$ 에서 $x=5$

$$\therefore \frac{xz}{y} = \frac{5 \cdot 2}{\frac{1}{4}} = 40$$

답 40

24

- 출제 단위: 수학 II - III. 다항함수의 미분법
- 출제 의도: ·삼차방정식의 그래프의 개형을 미분법을 이용하여 그릴 수 있다.
- 그래프에서 방정식의 근의 의미와 근과 계수의 관계를 이용하여 문제를 해결할 수 있다.
- 평가 요소: 내적 문제해결능력
- 풀이:

방정식 $\frac{1}{3}x^3 - x = k$ 에서

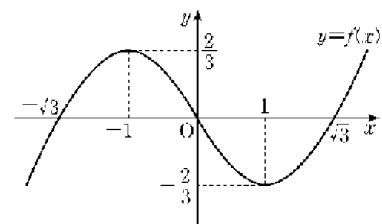
$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x$ 로 놓으면

$$f'(x) = x^2 - 1 = (x+1)(x-1)$$

$x=-1$ 에서 극대값 $f(-1) = -\frac{1}{3} + 1 = \frac{2}{3}$

$x=1$ 에서 극소값 $f(1) = \frac{1}{3} - 1 = -\frac{2}{3}$

를 가진다. 따라서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프의 개형을 그리면 다음과 같다.



따라서 방정식 $\frac{1}{3}x^3 - x = k$ 가 서로 다른 세 실근을

가지려면 $-\frac{2}{3} < k < \frac{2}{3}$ 이어야 한다.

곡선 $y=f(x)$ 는 원점에 대하여 대칭이므로

$0 \leq t < \frac{2}{3}$ 에서 세 실근을 $\alpha < \beta < \gamma$ 라 하면

$\alpha < \beta < 0, \gamma > 0$ 이다.

삼차방정식의 근과 계수의 관계에서

$$\alpha + \beta + \gamma = 0 \text{ 이므로}$$

$$|\alpha| + |\beta| + |\gamma| = -\alpha - \beta + \gamma = 2\gamma$$

한편 $0 \leq t < \frac{2}{3}$ 에서 $\gamma \geq \sqrt{3}$ 이므로

$$\text{최소 값 } m = 2\sqrt{3}$$

$$\therefore m^2 = 12$$

25

·출제 단위: 수학 I - IV. 수열의 극한

·출제 의도: 무한등비급수의 계산을 할 수 있다.

·평가 요소: 내적 문제해결능력

·풀이:

$$A_1 \text{의 넓이는 } 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}$$

도형 A_1 과 도형 A_n 위에 붙인 도형의 조각들은

모두 닮은꼴이고, n 번째 조각과 $(n+1)$ 번째

조각의 닮음비는 4 : 1이다.

즉, 넓이의 비는 16 : 1이다.

또, 조각의 개수는 2배씩 늘어나므로

$$S_n = \frac{3}{4} + \frac{3}{4} \times \frac{1}{16} \times 2 + \frac{3}{4} \times \left(\frac{1}{16}\right)^2 \times 4 + \dots$$

$$= \frac{3}{4} + \frac{3}{4} \times \frac{1}{8} + \frac{3}{4} \times \left(\frac{1}{8}\right)^2 + \dots$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{4} \cdot \left(\frac{1}{8}\right)^{n-1} = \frac{\frac{3}{4}}{1 - \frac{1}{8}} = \frac{6}{8-1}$$

$$= \frac{6}{7}$$

$$\therefore p+q=7+6=13$$

답 13

《 미분과 적분 》

26

·출제 단위: 미분과 적분 - I. 삼각함수

·출제 의도: 삼각함수의 덧셈정리를 이용하여 삼각함수의 값을 구할 수 있다..

·평가 요소: 계산능력

·풀이:

$$\sin \alpha = \frac{1}{3} \text{ 이므로}$$

$$\cos \alpha = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{2\sqrt{2}}{3} \quad \left(\because 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\begin{aligned} \therefore \cos \left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right) &= \cos \frac{\pi}{3} \cdot \cos \alpha - \sin \frac{\pi}{3} \cdot \sin \alpha \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{2\sqrt{2}}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{3} \\ &= \frac{2\sqrt{2} - \sqrt{3}}{6} \end{aligned}$$

답 ①

27

·출제 단위: 미분과 적분 - II. 함수의 극한

·출제 의도: 삼각함수와 지수함수의 극한을 구할 수 있다.

·평가 요소: 이해능력

·풀이:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{\tan x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{2x} \cdot \frac{x}{\tan x} \cdot 2 \\ &= 2 \end{aligned}$$

답 ④

28

·출제 단위: 미분과 적분 - III. 미분법

·출제 의도: 우함수, 기함수의 관계를 이해하고 추론할 수 있다..

·평가 요소: 추론능력

·풀이:

$$f(-x) = -f(x) \text{에서}$$

ㄱ. 양변을 미분하면 $f'(-x) \cdot (-1) = -f'(x)$ 이므로
 $f'(-x) = f'(x) \quad \therefore$ 참

ㄴ. (반례) $f(x) = x^3 - x$ 라 하면 $f(x)$ 는
 이계도함수를 가지고 $f(-x) = -f(x)$ 이지만

$$\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0} (3x^2 - 1) = -1$$

$\therefore$ 거짓

ㄷ. $f'(-x) = f'(x)$ 이므로 도함수 $f'(x)$ 는 우함수
 이다. 즉, $x = a$ ($a \neq 0$)에서 극대값을 가지면
 $x = -a$ 에서 극대값을 갖는다.

$\therefore$ 거짓

답 ①

29

·출제 단위: 미분과 적분 - IV. 적분법

·출제 의도: 회전체의 부피의 관계를 이용하여 순간변화율을 구할 수 있다.

·평가 요소: 외적 문제해결능력

·풀이:

처음 물의 양을 $m\pi$ 라 하면

$$\begin{aligned} m\pi &= \pi \int_0^u \frac{1}{3} y dy + \pi \int_0^v y dy - \pi \int_0^v \frac{1}{3} y dy \\ &= \pi \int_0^u \frac{1}{3} y dy + \pi \int_0^v \frac{2}{3} y dy \\ &= \pi \left[\frac{1}{6} y^2 \right]_0^u + \pi \left[\frac{1}{3} y^2 \right]_0^v \\ &= \frac{\pi}{6} u^2 + \frac{\pi}{3} v^2 \end{aligned}$$

$$\therefore \frac{1}{6} u^2 + \frac{1}{3} v^2 = m \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

①의 양변을 u 에 대하여 미분하면

$$\frac{1}{3} u + \frac{2}{3} v \cdot \frac{dv}{du} = 0, \quad \frac{dv}{du} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{u}{v}$$

따라서 v 가 u 의 $\frac{1}{2}$ 이 되는 순간의 $\frac{dv}{du}$ 의 값은

$$\frac{dv}{du} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{u}{\frac{1}{2}u} = -1 \quad \left(\because v = \frac{1}{2}u \right)$$

답 ②

30

·출제 단위: 미분과 적분 - IV. 적분법

·출제 의도: 접선의 방정식을 구하여 영역의 넓이를 구할 수 있다.

·평가 요소: 내적 문제해결능력

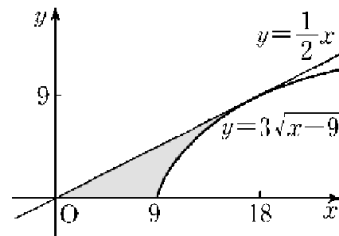
·풀이:

$$y = 3\sqrt{x-9} \text{에서 } y' = \frac{3}{2\sqrt{x-9}}$$

$$x = 18 \text{일 때 } y' = \frac{3}{2\sqrt{18-9}} = \frac{1}{2} \text{이므로}$$

점 (18, 9)에서의 접선의 방정식은

$$y = \frac{1}{2}(x-18) + 9 = \frac{1}{2}x$$



따라서 구하는 영역의 넓이를 S 라 하면

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \times 18 \times 9 - \int_9^{18} 3\sqrt{x-9} dx \\ &= 81 - 3 \left[\frac{2}{3} (x-9)\sqrt{x-9} \right]_9^{18} \\ &= 81 - 54 = 27 \end{aligned}$$

답 27

《 확률과 통계 》

26

·출제 단위: 확률과 통계-I. 자료의 정리와 요약

·출제 의도: 줄기와 잎 그림을 이해하고 평균, 중앙값, 최빈값을 구할 수 있다.

·평가 요소: 이해능력

·풀이:

+++++

$$m = \frac{15 + 19 + 23 + 27 + 28 + 32 + 36 + 36 + 41 + 45}{10}$$

$$= 30.2$$

$$n = \frac{28 + 32}{2} = 30$$

$$\text{최빈값 } f = 36$$

$$\therefore n < m < f$$

답 ④

27

·출제 단위: 확률과 통계-III. 확률변수와 확률분포

·출제 의도: 확률질량함수의 뜻을 알고 조건부확률의 값을 구할 수 있다.

·평가 요소: 내적 문제해결능력

·풀이:

$$\sum_{x=0}^7 P(X=x) = 1 \text{ 이므로}$$

$$3c + 3 \times 2c + 2 \times 5c^2 = 1, \quad 10c^2 + 9c - 1 = 0$$

$$(c+1)(10c-1) = 0 \quad \therefore c = \frac{1}{10} \quad (\because c > 0)$$

$$\therefore P(X=x) = \begin{cases} \frac{1}{10} & (x=0, 1, 2) \\ \frac{2}{10} & (x=3, 4, 5) \\ \frac{1}{20} & (x=6, 7) \end{cases}$$

$$P(B) = P(X \geq 3) = 3 \times \frac{2}{10} + 2 \times \frac{1}{20} = \frac{7}{10}$$

$$P(A \cap B) = P(X \geq 6) = 2 \times \frac{1}{20} = \frac{1}{10}$$

$$\therefore P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{1}{7}$$

답 ③

28

·출제 단위: 확률과 통계-II. 확률

·출제 의도: 복원추출의 경우 확률을 구할 수 있다.

·평가 요소: 내적 문제해결능력

·풀이:

$$\text{주머니에서 빨간 공을 꺼낼 확률은 } \frac{5}{20} = \frac{1}{4}$$

$$\text{주머니에서 노란 공을 꺼낼 확률은 } \frac{4}{20} = \frac{1}{5}$$

$$\text{주머니에서 파란 공을 꺼낼 확률은 } \frac{2}{20} = \frac{1}{10}$$

매 시행은 서로 독립이므로 3번의 시행에서 순서에 관계없이 빨간 공, 노란 공, 파란 공을 각각 하나씩 꺼낼 확률은

$$3! \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{5} \times \frac{1}{10} = \frac{3}{100}$$

답 ②

29

·출제 단위: 확률과 통계-IV. 통계적 추정

·출제 의도: 표본비율의 분포를 이해하고 확률을 구할 수 있다.

·평가 요소: 외적 문제해결능력

·풀이:

임의추출한 100명 중에서 실제 참석자의 비율을 p 라고 하면 구하는 확률은

$$P(0.43 \leq p \leq 0.56) \text{이다.}$$

이 때, 모비율은 $p = 0.5$ 이고

$$np = 100 \times 0.5 = 50 \geq 5,$$

$$nq = 100 \times 0.5 = 50 \geq 5 \text{ 이므로}$$

$$Z = \frac{\hat{p} - p}{\sqrt{\frac{pq}{n}}} = \frac{\hat{p} - 0.5}{\sqrt{\frac{0.5 \times 0.5}{100}}} = \frac{\hat{p} - 0.5}{0.05}$$

는 표준정규분포 $N(0, 1)$ 에 가까워진다.

따라서 구하는 확률은

$$P(0.43 \leq \hat{p} \leq 0.56)$$

$$= P\left(\frac{0.43 - 0.5}{0.05} \leq Z \leq \frac{0.56 - 0.5}{0.05}\right)$$

$$= P(-1.4 \leq Z \leq 1.2)$$

$$= P(0 \leq Z \leq 1.4) + P(0 \leq Z \leq 1.2)$$

+++++

$$= 0.4192 + 0.3849$$

$$= 0.8041$$

답 ①

30

- 출제 단원: 확률과 통계-IV. 통계적 추정
- 출제 의도: 모집단의 확률분포로부터 표본평균의 분포를 구할 수 있다.
- 평가 요소: 내적 문제해결능력
- 풀이:

모집단에서 복원추출한 크기 2인 표본을 (a, b) 라 하면

$\bar{X} = 1.5$ 인 경우의 표본은 $(1, 2), (2, 1)$ 의 2가지이므로 $a = 2$

$\bar{X} = 2$ 인 경우의 표본은

$(1, 3), (2, 2), (3, 1)$ 의 3가지이므로 $b = 3$

$$\therefore c = 0.5 \times 0.3 \times 2 = 0.3,$$

$$d = 0.5 \times 0.2 \times 2 + 0.3 \times 0.3 = 0.29$$

$$\therefore 100(b + c) = 100(3 + 0.3) = 330$$

답 330

《 이산수학 》

26

- 출제 단원: 이산수학 - II. 그래프
- 출제 의도: 완전그래프의 뜻을 이해하고 조합의 수를 구할 수 있다
- 평가 요소: 이해능력
- 풀이:

완전그래프는 서로 다른 두 꼭지점 사이에 항상 변이 있는 그래프이므로 정십각형 모양의 그래프를 완전그래프로 만들기 위해 필요한 변의 개수는

$$_{10}C_2 - 10 = 45 - 10 = 35$$

답 ②

27

- 출제 단원: 이산수학 - II. 그래프
- 출제 의도: 생성수형도의 뜻을 이해하고 경우의 수를 구할 수 있다
- 평가 요소: 이해능력
- 풀이:

주어진 그래프에서 생성수형도를 만들기 위해서는 회로를 찾아 더 이상 회로가 없을 때까지 변을 제거하여야 하며 그 그래프는 연결된 그래피어야 한다.

주어진 그래프에서 한 개의 변을 제거하면 회로가 존재하며, 세 개 이상의 변을 제거하면 연결된 그래프가 아니므로 각각의 경우에 생성수형도를 만들 수 없다.

두 개의 변을 제거하면 경우에 따라 생성수형도를 만들 수 있는 데 그 경우의 수는 (7개의 변 중 두 개의 변을 제거하는 경우의 수) - (두 변을 제거해도 수형도가 되지 않는 경우의 수)이다. 즉, 두 변을 제거해도 수형도가 되지 않는 경우는 변 $xy, xu,$

uv 중 두 변을 제거하는 경우의 수와 변 yz, zw, vw 중 두 변을 제거하는 경우의 수의 합이므로

$$2 \times {}_3C_2 = 6$$

따라서, 생성수형도의 개수는

$${}_7C_2 - 6 = 21 - 6 = 15$$

답 ③

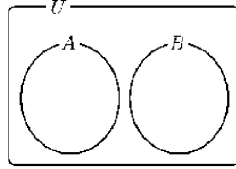
28

- 출제 단원: 이산수학 - I. 선택과 배열
- 출제 의도: 집합에서 서로소의 뜻을 이해하고 경우의 수를 구할 수 있다
- 평가 요소: 추론 능력
- 풀이:

$U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ 이라 할 때, 서로소인 두 집합 A, B 의 순서쌍의 개수는 오른쪽 그림에서 $A, B, (A \cup B)^c$ 의 세 영역에 각 원소가 들어가는 경우의 수이므로

$$3^6 = 729$$

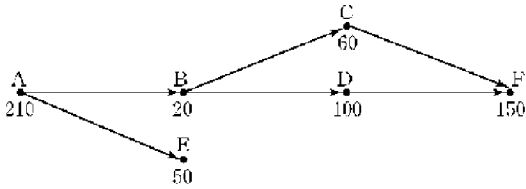
답 ①



29

- 출제 단위: 이산수학 - IV. 의사결정과 최적화
- 출제 의도: 최적화와 알고리즘을 이해하고 최소 시간을 구할 수 있다
- 평가 요소: 외적 문제해결능력
- 풀이:

가능한 작업의 순서를 생각해 보면



위의 그래프에서 A에서 시작하여 E나 F로 끝나는 경로를 찾으려면

- $A \rightarrow E$ (260(분) 소요)
- $A \rightarrow B \rightarrow D \rightarrow F$
($210 + 20 + 100 + 150 = 480$ (분) 소요)
- $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow F$
($210 + 20 + 60 + 150 = 440$ (분) 소요)

이 중 시작에서 마지막 작업까지의 경로 중에서 작업 시간이 가장 긴 경로가 작업을 마치기 위한 최소 작업 시간이므로 구하는 것은 480분이다.

답 ④

30

- 출제 단위: 이산수학 - III. 알고리즘
- 출제 의도: 점화식을 파악하여 일반항을 구한 후 수열의 합을 구할 수 있다
- 평가 요소: 내적 문제 해결 능력
- 풀이:

자연수 k 에 대하여 $n = 5^k$ 일 때

$$f(5n) = f(n) + 3, \quad f(5) = 4 \text{ 이므로}$$

$$f(5 \cdot 5^k) = f(5^k) + 3$$

$$\text{즉, } f(5^k) = f(5 \cdot 5^{k-1}) = f(5^{k-1}) + 3$$

여기서

$$f(5^{k-1}) = f(5 \cdot 5^{k-2}) = f(5^{k-2}) + 3$$

$$f(5^{k-2}) = f(5 \cdot 5^{k-3}) = f(5^{k-3}) + 3$$

...

$$f(5^2) = f(5 \cdot 5) = f(5) + 3$$

이므로

$$f(5^k) = f(5) + (k-1) \cdot 3$$

$$= 3k + 1$$

$$\begin{aligned} \therefore \sum_{k=1}^{10} f(5^k) &= \sum_{k=1}^{10} (3k + 1) = 3 \times \frac{1}{2} \times 10 \times 11 + 10 \\ &= 175 \end{aligned}$$

답 175