

2004학년도 대학수학능력시험 수리 · 탐구(I) 영역 자연계

1. <풀이>

$$\log_3 12 + \log_3 9 - \log_3 4 = \log_3 \frac{12 \times 9}{4} = \log_3 27 \\ = \log_3 3^3 = 3$$

답 : ③

<별해>

$$\log_3 12 + \log_3 9 - \log_3 4 \\ = (1 + \log_3 4) + 2 - \log_3 4 = 3$$

2. <풀이>

$$\frac{3}{x - \frac{x-1}{x+1}} = \frac{3(x+1)}{x(x+1) - (x-1)} = \frac{3(x+1)}{x^2 + 1} \\ = \frac{3(\sqrt{2} + 1)}{2 + 1} = \sqrt{2} + 1$$

답 : ①

3. <풀이>

$$\sin \theta \cdot \tan \theta = \sin \theta \cdot \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{\sin^2 \theta}{\cos \theta}$$

그런데 $\sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta = 1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{8}{9}$ 이므로

$$\sin \theta \cdot \tan \theta = \frac{\frac{8}{9}}{-\frac{1}{3}} = -\frac{8}{3}$$

답 : ②

<별해> 사인과 탄젠트의 값을 직접 구한다.

$\cos \theta < 0$ 이므로 θ 는 제2, 3사분면의 각이다.

(i) θ 가 제2사분면의 각일 때,

$$\sin \theta = \sqrt{1 - \cos^2 \theta} = \sqrt{1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{\frac{2\sqrt{2}}{3}}{-\frac{1}{3}} = -2\sqrt{2}$$

$$\therefore \sin \theta \cdot \tan \theta = \frac{2\sqrt{2}}{3} \cdot (-2\sqrt{2}) = -\frac{8}{3}$$

(ii) θ 가 제3사분면의 각일 때,

$$\sin \theta = -\sqrt{1 - \cos^2 \theta} = -\sqrt{1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^2} = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{-\frac{2\sqrt{2}}{3}}{-\frac{1}{3}} = 2\sqrt{2}$$

$$\therefore \sin \theta \cdot \tan \theta = -\frac{2\sqrt{2}}{3} \cdot 2\sqrt{2} = -\frac{8}{3}$$

$$(i), (ii) \text{에서 } \sin \theta \cdot \tan \theta = -\frac{8}{3}$$

4. <풀이>

모든 항을 좌변으로 이항하면

$$x - \frac{10}{x-3} \leq 0$$

통분하면

$$\frac{x(x-3) - 10}{x-3} \leq 0, \quad \frac{(x-5)(x+2)}{x-3} \leq 0$$

양변에 $(x-3)^2$ 을 곱하면

$$(x-5)(x+2)(x-3) \leq 0, \quad x \neq 3$$

$$\therefore x \leq -2, 3 < x \leq 5$$

x 는 자연수이므로 4, 5만 가능하다.

답 : ②

5. <풀이>

$x \rightarrow 1$ 일 때, (분모) $\rightarrow 0$ 이므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이어야 한다.

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 1} \{g(x) - 2\} = 0 \text{ 에서 } g(1) = 2$$

$$\therefore f(2) = 1$$

그러므로 주어진 식은

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{g(x) - 2}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{g(x) - g(1)}{x - 1} = g'(1) = 3$$

$f(x)$ 의 역함수가 $g(x)$ 이므로 $g(f(x)) = x$ 에서

$$g'(f(x)) \cdot f'(x) = 1$$

$$\therefore f'(x) = \frac{1}{g'(f(x))}$$

$$\therefore f'(2) = \frac{1}{g'(f(2))} = \frac{1}{g'(1)} = \frac{1}{3}$$

답 : ③

6. <풀이>

일차변환 f 와 g 를 나타내는 행렬을 각각 A 와 B 라 하면

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

합성변환 $g \circ f$ 를 나타내는 행렬은

$$BA = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin \theta & \cos \theta \\ \cos \theta & \sin \theta \end{pmatrix}$$

점 $(1, 0)$ 이 점 $\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ 으로 옮겨졌으므로

$$\begin{pmatrix} -\sin\theta & \cos\theta \\ \cos\theta & \sin\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$$

$$\text{에서 } \sin\theta = \frac{1}{2}, \cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\therefore \theta = 30^\circ$$

$$\text{즉, } BA = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix} \text{ 이므로 점 } \left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \text{ 은}$$

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

답 : ⑤

<별해 1>

그림을 그려 보자.

점 P(1, 0)은 f에 의하여

점 Q(0, 1)로 옮겨지고,

다시 g에 의하여 R

$\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ 로 옮겨졌

으므로 g는 원점을 중심

으로 30°회전하는 변환이다.

점 S $\left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ 는 f에 의하여 점 T

$\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$ 로 옮겨지고, 다시 g에 의하여 U

$(-1, 0)$ 로 옮겨진다.

<별해 2>

합성변환 $g \circ f$ 를 나타내는 행렬을 M이라 하면, 점

$(1, 0)$ 이 점 $\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ 으로 옮겨지므로

$$M \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$$

양변에 -1을 곱하면

$$-M \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix},$$

$$\text{즉 } M \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$$

따라서 점 $(-1, 0)$ 은 점 $\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ 으로 옮겨진다.

7. <풀이>

오른쪽 그림과 같이 꼭지점 P에서 두 평면 ABCD, EFGH에 내린 수선의 발을 각각 L, M이라 하고, 두 모서리 AB, EF의 중점을 각각 K, Q라 하면, 두 선분 PK, QK는 각각 모서리 AB에 수직이므로

$$\angle PKQ = \theta$$

이다. $\triangle PAK$ 에서 $\overline{PA} = 2$, $\overline{AK} = 1$ 이므로

$$\overline{PK} = \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3}$$

$\triangle PKL$ 에서 $\overline{KL} = 1$ 이므로

$$\overline{PL} = \sqrt{(\sqrt{3})^2 - 1^2} = \sqrt{2}$$

$\triangle PQM$ 에서 $\overline{PM} = \sqrt{2} + 2$, $\overline{QM} = 1$ 이므로

$$\overline{PQ} = \sqrt{(\sqrt{2} + 2)^2 + 1^2} = \sqrt{7 + 4\sqrt{2}}$$

그러므로 $\triangle PKQ$ 에 제이코사인법칙을 적용하면

$$\begin{aligned} \cos\theta &= \frac{4 + 3 - (7 + 4\sqrt{2})}{2 \cdot 2 \cdot \sqrt{3}} \\ &= -\frac{4\sqrt{2}}{4\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{6}}{3} \end{aligned}$$

답 : ①

<별해>

$\triangle PAB$ 의 평면 ABCD 위로의 정사영을 $\triangle P'AB$ 라 하자. $\triangle PAB$ 는 한 변의 길이가 2인 정삼각형이므로 그 넓이는

$$S = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot 2^2 = \sqrt{3}$$

$\triangle P'AB$ 의 넓이 S' 은 정사각형 ABCD의 $\frac{1}{4}$ 이므로

$$S' = \frac{1}{4} \cdot 2^2 = 1$$

평면PAB와 평면 ABCD가 이루는 각의 크기를 α 라 하면

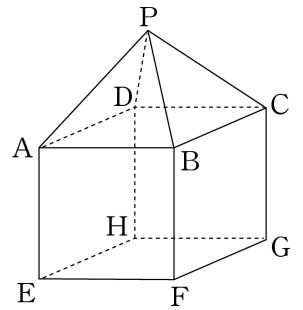
$$S' = S \cos\alpha \text{ 에서 } \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

평면PAB와 평면 AEFB가 이루는 각의 크기 θ 는

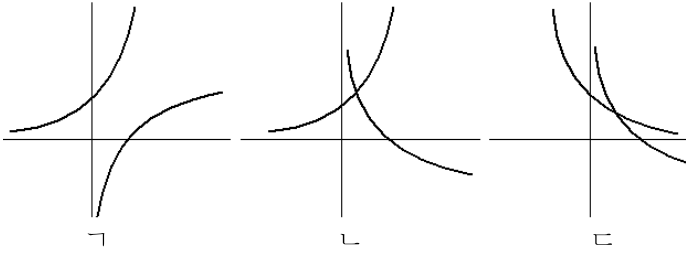
$\alpha + \frac{\pi}{2}$ 와 같으므로

$$\begin{aligned} \cos\theta &= \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) \\ &= -\sin\alpha = -\sqrt{1 - \cos^2\alpha} \quad (\because \alpha \text{는 예각}) \\ &= -\sqrt{1 - \frac{1}{3}} = -\frac{\sqrt{6}}{3} \end{aligned}$$

8. <풀이>



각각의 경우를 그래프로 그리면 다음과 같다.



그림에서 두 그래프가 항상 만나는 것은 ㄴ, ㄷ이다.

답 : ⑤

9. <풀이>

역행렬이 존재하지 않으므로

$$ad - bc = 0 \text{ 에서}$$

$$ad = bc \dots\dots ㉠$$

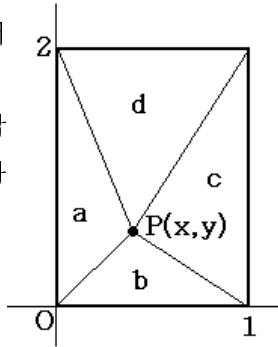
오른쪽 그림과 같이 좌표축을 잡고 점 P의 좌표를 (x, y) 라 하면

$$a = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot x = x$$

$$b = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot y = \frac{y}{2}$$

$$c = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot (1-x) = 1-x$$

$$d = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot (2-y) = \frac{2-y}{2}$$



㉠에 대입하면

$$x \cdot \frac{2-y}{2} = (1-x) \cdot \frac{y}{2}$$

$$\therefore y = 2x \text{ (단, } 0 < x < 1, 0 < y < 2 \text{)}$$

즉, 점 P의 자취는 원점과 점 (1, 2)를 잇는 선분이므로 그 길이는

$$\sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$$

답 : ④

<참고>

일반적으로 직사각형 내부에 한 점 P를 잡고, 직사각형을 네 조각으로 나누면 항상 $a+c=b+d$ 인 관계가 성립한다.

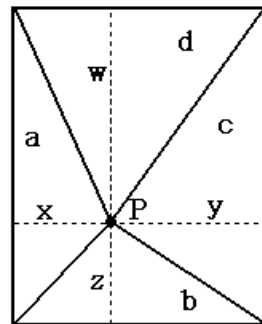
증명해 보자.

오른쪽 그림과 같이 점 P에서 각 변까지의 길이를 각각

x, y, z, w 라 하면

$$a = \frac{1}{2} x(z+w) = \frac{xz+xw}{2}$$

$$b = \frac{1}{2} z(x+y) = \frac{xz+yz}{2}$$



$$c = \frac{1}{2} y(z+w) = \frac{yz+yw}{2}$$

$$d = \frac{1}{2} w(x+y) = \frac{xw+yw}{2}$$

에서 $a+c=b+d$ 임을 알 수 있다.

<별해> <참고>를 이용한 별해임.

㉠에서 $d = \frac{bc}{a}$ 이므로 $a+c=b+d$ 에 대입하면

$$a+c=b+\frac{bc}{a}$$

양변에 a 를 곱하면 $a(a+c)=b(a+c)$ 에서 $a=b$

㉠에서 $c=d$ 임도 알 수 있다.

$a=b$ 이고 $c=d$ 이면 $a+d=b+c$ 이므로 점 P는 직사각형의 대각선 위에 존재한다.

10. <풀이>

$w=a+bi$ (단, a, b 는 실수)라 하자.

$$\neg. z = \overline{w} = a - bi$$

$$\therefore |z+w| = |2a| = 2|a|$$

그런데 $|z| = \sqrt{a^2+b^2}$ 이고, $2|a| \leq 2\sqrt{a^2+b^2}$

(등호는 $b=0$ 일 때 성립)이므로

$$|z+w| \leq 2|z| \text{ (참)}$$

$$\neg. z = iw = -b + ai$$

$$\therefore |z-w| = |(-a-b) + (a-b)i|$$

$$= \sqrt{(-a-b)^2 + (a-b)^2} = \sqrt{2(a^2+b^2)}$$

$$= \sqrt{2} \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{2} |z| \text{ (참)}$$

ㄷ. (반례) $w=bi$ 이면, $z=-\overline{w}=i$ 이다. 이 때

$$|z+w| = |2i| = 2 \geq 1 = |z|^2 \text{ (거짓)}$$

이상에서 옳은 것은 ㄱ과 ㄴ이다.

답 : ③

<별해>

$$\neg. z = \overline{w} \text{에서}$$

$$|z| = |\overline{w}| = |w|$$

$$\text{이므로 } |z+w| \leq |z| + |w| = 2|z|$$

$$\neg. z = iw \text{에서}$$

$$|z| = |iw| = |w|$$

$$\text{이므로 } |z-w| = |iw-w|$$

$$= |w(i-1)| = |w| |i-1| = \sqrt{2} |z|$$

11. <풀이>

$$\neg. f(\sqrt{2}) = [2] = 2, g(\sqrt{2}) = [\sqrt{2}]^2 = 1^2 = 1$$

$$\therefore f(\sqrt{2}) > g(\sqrt{2}) \text{ (참)}$$

ㄴ. $x = n$ (정수)이면

$$f(x) = [n^2] = n^2, g(x) = [n]^2 = n^2$$

$$\therefore f(x) = g(x) \text{ (참)}$$

ㄷ. (반례) $x = 0.5$ 일 때

$$f(x) = [0.5^2] = [0.25] = 0, g(x) = [0.5]^2 = 0^2 = 0$$

으로 $f(x) = g(x)$ 이지만, x 는 정수가 아니다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 : ②

12. <풀이>

$$\text{ㄱ. } 3^1 = 3, 3^2 = 9, 3^3 = 27, 3^4 = 81, 3^5 = 243, \dots$$

$$\text{이므로 } A(2) = \{1, 3, 7, 9\}$$

$$\therefore 1 \in A(3) \text{ (참)}$$

$$\text{ㄴ. } 6^1 = 6, 6^2 = 36, 6^3 = 216, \dots \text{ 이므로}$$

$$A(6) = \{6\}$$

$$\therefore A(6) \not\subset A(3) \text{ (거짓)}$$

$$\text{ㄷ. } n = 3 \text{ 이면 } 3^3 = 27 \text{ 이고, 일의 자리만 생각하면}$$

$$A(7) = \{1, 3, 7, 9\} \text{ 이므로}$$

$$A(27) = A(3) \text{ (참)}$$

이상에서 ㄱ, ㄷ이 참이다.

답 : ⑤

13. <풀이>

ㄱ. $f_2 \circ f_3$ 는 270° 회전 후 다시 180° 회전한 것이므로 결국 450° , 곧 90° 회전시킨 것과 같다.

$$\therefore f_2 \circ f_3 = f_1 \text{ (거짓)}$$

ㄴ. f_1^{-1} 은 -90° 회전이고, f_3 은 270° 회전이므로

$$f_1^{-1} = f_3 \text{ (참)}$$

ㄷ. $f_1 \circ f_3$ 은 270° 회전 후 90° 회전했으므로 결국 360° 회전한 셈이다.

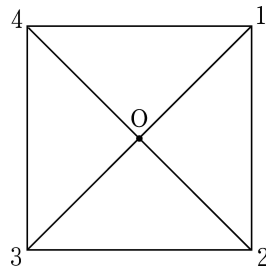
$f_3 \circ f_1$ 은 90° 회전 후 270° 회전했으므로 역시 360° 회전한 것이다.

$$\therefore f_1 \circ f_3 = f_3 \circ f_1 \text{ (참)}$$

이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

답 ④

14. <풀이>



우선 세 숫자의 조합을 생각하면

$$(1, 2, 3, 3), (1, 1, 2, 3), (1, 2, 2, 3), (1, 1, 1, 2),$$

$$(1, 1, 2, 2), (1, 2, 2, 2)$$

가 가능하다. 즉, 1과 2를 두 개 사용할 때와 세 개 사용할 때, 그리고 네 개 사용할 때로 나뉜다.

(i) 1과 2를 두 개 사용할 때 $\rightarrow (1, 2, 3, 3)$

$$\frac{4!}{2!} = 12 \text{ (개)}$$

(ii) 1과 2를 세 개 사용할 때 $\rightarrow (1, 1, 2, 3), (1, 2, 2, 3)$

$$\frac{4!}{2!} \times 2 = 24 \text{ (개)}$$

(iii) 1과 2를 네 개 사용할 때 $\rightarrow (1, 1, 1, 2), (1, 1, 2, 2), (1, 2, 2, 2)$

$$\frac{4!}{3!} + \frac{4!}{2!2!} + \frac{4!}{3!} = 4 + 6 + 4 = 14 \text{ (개)}$$

이상에서 구하는 자연수의 개수는

$$12 + 24 + 14 = 50 \text{ (개)}$$

답 : ⑤

<별해 1>

여사건을 구해 보자.

숫자 1, 2, 3을 중복사용하여 만들어지는 네 자리 자연수는

$$3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 81 \text{ (개)}$$

가 전체집합이다.

(i) 한 숫자로만 된 것은

$$1111, 2222, 3333 \text{ 의 3개}$$

(ii) 두 숫자로만 된 것 중 1과 3으로만 된 것

$$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 - 2 = 14 \leftarrow 2 \text{를 뺀 것은 한 숫자로만 된 것이 (i)과 중복되므로}$$

(iii) 두 숫자로만 된 것 중 2와 3으로만 된 것도 (ii)와 마찬가지로 14개가 있다.

이상에서 여사건의 개수는 31이므로 구하는 개수는

$$81 - 31 = 50 \text{ (개)}$$

<별해 2>

먼저 네 자리 중 두 자리를 1과 2로 정하고 나머지 두 자리는 다음과 같이 임의로 정하면 된다.

$$(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 2), (2, 3), (3, 3)$$

각각의 경우의 수는

$$\frac{4!}{3!}, \frac{4!}{2!2!}, \frac{4!}{2!}, \frac{4!}{3!}, \frac{4!}{2!}, \frac{4!}{2!}$$

$$\text{이고, 이들의 합은 } 4 + 6 + 12 + 4 + 12 + 12 = 50$$

15. <풀이>

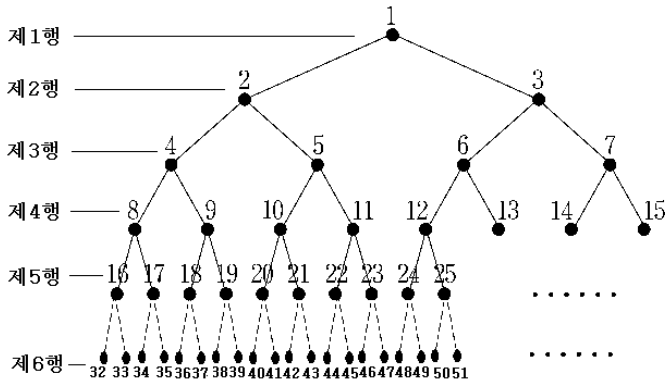
32는 제6행의 첫째항이다.

33은 제5행의 16에 바로 연결되므로

$$N(32, 33) = 2$$

34와 35는 제4행의 8과 제5행의 17에 연결되므로

$$N(32, 34) + N(32, 35) = 4 + 4 = 4 \times 2 = 8$$



36~39는 제3행의 4와 제4행의 9에 연결되므로

$$N(32, 36) + N(32, 37) + N(32, 38) + N(32, 39) = 6 + 6 + 6 + 6 = 24$$

40~47은 제2행의 2에 연결되므로

$$N(32, 40) + N(32, 41) + \dots + N(32, 47) = 8 \times 8 = 64$$

마지막 48~63은 제1행의 1에 연결되므로

$$N(32, 48) + N(32, 49) + \dots + N(32, 63) = 10 \times 16 = 160$$

이상에서 구하는 값은

$$2 + 8 + 24 + 64 + 160 = 258$$

답 : ②

16. <풀이>

점 (a, b) 가 부등식 $y > f(x)$ 를 만족하므로

$$b > a^2 - 4a$$

$$\therefore b > a^2 - 4a \text{ 이므로 } \frac{b}{2} > \frac{a^2}{2} - 2a$$

$$\text{그런데 } f\left(\frac{a}{2}\right) = \frac{a^2}{4} - 2a \text{ 이므로 } \frac{b}{2} > f\left(\frac{a}{2}\right) \text{ (참)}$$

ㄴ. (반례) 점 $(3, 0)$ 은 주어진 부등식을 만족하지만,

점 $(6, 0)$ 은 주어진 부등식을 만족하지 않는다.

$$\text{ㄷ. } b > a^2 - 4a \text{ 이므로 } -b < -a^2 + 4a$$

$$\text{그런데 } f(-a) = a^2 + 4a \text{ 이므로 } -b < f(-a) \text{ (참)}$$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 : ④

<별해>

점 $P(a, b)$ 에

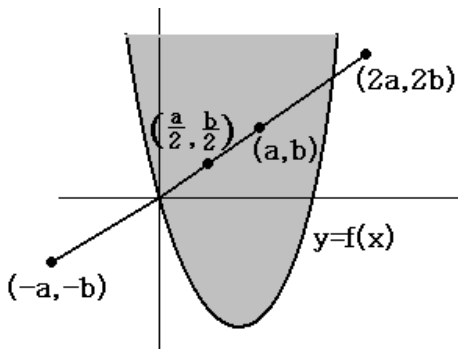
대하여 점

$$\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right) \text{는 선}$$

분 OP 의 중점, 점

$(2a, 2b)$ 는 선

분 OP 의 두 배



연장선, 점 $(-a, -b)$ 는 원점에 대한 대칭점이므로
오른쪽 그림에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

17. <풀이>

$$\overline{AC} = \sqrt{\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2}$$

$$= \sqrt{4\overline{BC}^2 + \overline{BC}^2} = \sqrt{5} \overline{BC} \text{ (가)}$$

$$\overline{AE} = \overline{AC} - \overline{CD} = \sqrt{5} \overline{BC} - \overline{BC} = (\sqrt{5} - 1) \overline{BC}$$

(나)

$$\overline{EB} = \overline{AB} - \overline{AE} = 2\overline{BC} - (\sqrt{5} - 1) \overline{BC} = (3 - \sqrt{5}) \overline{BC}$$

답 : ④

$$18. \text{ <풀이> } 6^4 \times 6^4 \geq 6 \times 4 = 24$$

(i) x^2 의 일의 자리의 수가 4이고 y^2 의 일의 자리의
수가 6인 경우에 x 의 일의 자리의 수가 될 수 있는 것
은 2 또는 8 뿐이고, y 의 일의 자리의 수가 될 수 있
는 것은 4 또는 6 뿐이다.

$2 \times 4 = 8$, $2 \times 6 = 12$, $8 \times 4 = 32$, $8 \times 6 = 48$ 이므로 xy
의 일의 자리의 수가 될 수 있는 것은 2 또는 8뿐이므로
 N 은 10의 배수가 아니다.

(iii) x^2 과 y^2 의 일의 자리의 수가 모두 4이면, x, y
의 일의 자리의 수가 될 수 있는 것은 각각 2 또는 8
뿐이고

$$2 \times 2 = 4, 2 \times 8 = 16, 8 \times 8 = 64$$

에서 xy 의 일의 자리의 수가 될 수 있는 것은 4 또는
6뿐이므로 N 은 10의 배수가 아니다.

마찬가지로 x^2 과 y^2 의 일의 자리의 수가 모두 6이면,
 x, y 의 일의 자리의 수가 될 수 있는 것은 각각 4 또는
6뿐이고

$$4 \times 4 = 16, 4 \times 6 = 24, 6 \times 6 = 36$$

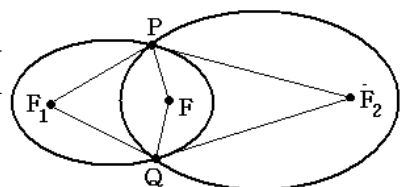
에서 xy 의 일의 자리의 수가 될 수 있는 것은 4 또는
6뿐이므로 N 은 10의 배수가 아니다.

이상에서 하나만 10의 배수가 아니거나, 모두 10의 배수
가 아니면 모순이 생기므로 $x^2 + xy + y^2$ 이 10의 배수
이면 x, y 는 모두 10의 배수이다.

답 : ③

19. <풀이>

오른쪽 그림에서 타
원의 정의를 이용하
면



$$\overline{PF} + \overline{PF}_1 = 16, \overline{PF} + \overline{PF}_2 = 24$$

이므로

$$|\overline{PF_1} - \overline{PF_2}| = 8$$

마찬가지로 $\overline{QF} + \overline{QF_1} = 16$, $\overline{QF} + \overline{QF_2} = 24$ 이므로

$$|\overline{QF_1} - \overline{QF_2}| = 8$$

$$\therefore |\overline{PF_1} - \overline{PF_2}| + |\overline{QF_1} - \overline{QF_2}| = 16$$

답 : ①

20. <풀이>

원점을 지나는 직선 $y = kx$ 가 포물선 $y = \frac{1}{4}x^2 + 3$

과 접하는 순간을 구하기 위해 두 식을 연립하면

$$\frac{1}{4}x^2 + 3 = kx, \quad x^2 - 4kx + 12 = 0$$

$$\frac{D}{4} = 4k^2 - 12 = 0$$

에서 $k = \pm\sqrt{3}$

그러므로 두 접선의 방정식은 $y = \pm\sqrt{3}x$ 이다.

$$\overrightarrow{OB} = \frac{\overrightarrow{OA}}{|\overrightarrow{OA}|} \text{ 는 } \overrightarrow{OA}$$

와 같은 방향의 단위벡터이므로 중점 B의 자취는 두 접선 사이의 단위원이다.

$y = \pm\sqrt{3}x$ 가 원점을 중심으로 하는 단위원과 만나는 점

$y = -\sqrt{3}x$ 를 P, Q라 하면 중점 B가 그리는 자취는 부채꼴 OPQ의 호이고, 두 접선이 x축과 이

루는 각의 크기는 각각 $\frac{\pi}{3}$ 이다.

따라서 부채꼴의 중심각이 $\frac{\pi}{3}$ 이므로 구하는 길이는

$$1 \cdot \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{3}$$

답 : ①

21. <풀이>

두 그래프가 서로 다른

두 점에서 만나는 것은

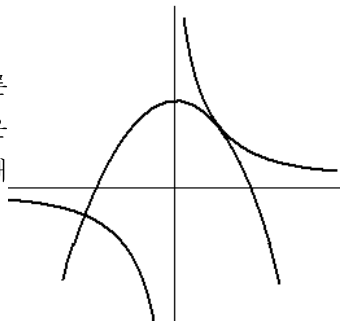
오른쪽 그림과 같을 때이다.

$x = t$ 에서 접한다면

$$\frac{16}{t} = -t^2 + a \quad \dots\dots ㉠$$

$y = \frac{16}{x}$ 을 미분하면 $y' = -\frac{16}{x^2}$ 이고, $y = -x^2 + a$

을 미분하면 $y' = -2x$ 이므로



$$-\frac{16}{t^2} = -2t \text{ 에서 } t = 2$$

㉠에 대입하면

$$\frac{16}{2} = -4 + a \text{ 에서 } a = 12$$

답 : ④

<별해>

두 곡선이 서로 다른 두 점에서 만나려면 방정식

$$\frac{16}{x} = -x^2 + a$$

이 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

$x^2 + \frac{16}{x} = a$ 에서 $f(x) = x^2 + \frac{16}{x}$ 이라 하면

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2x - \frac{16}{x^2} = \frac{2x^3 - 16}{x^2} \\ &= \frac{2(x-2)(x^2 + 2x + 4)}{x^2} \end{aligned}$$

증감표를 그리면 아래와 같고, 극소값은

x	$\dots$	0	$\dots$	2	$\dots$
$f(x)$	-		-	0	+
$f'(x)$	$\searrow$		$\searrow$	극소	$\nearrow$

$$f(2) = 4 + \frac{16}{2} = 12$$

점근선을 조사하면

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow -0} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +0} f(x) = \infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$$

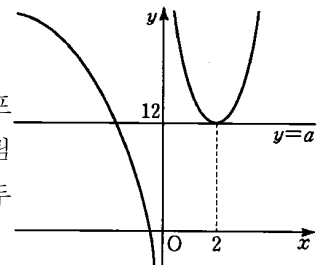
따라서 $y = f(x)$ 의 그래프

는 오른쪽 그림과 같고, 그림

에서 $y = a$ 에 서로 다른 두

점에서 만나려면

$$a = 12$$



22. <풀이>

$$100 = 16 \times 6 + 4 = 64_{(16)}$$

$$245 = 16 \times 15 + 5 = F5_{(16)}$$

$$64 = 16 \times 4 = 40_{(16)}$$

이므로 입력해야 할 문자열은 64F540이다.

답 : ②

23. <풀이>

사인함수의 최대값이 0.6이므로 $a = 0.6$ 이다.

주기가 5이므로 $\frac{2\pi}{b} = 5$ 에서 $b = \frac{2}{5} \pi$

그러므로 주어진 함수는 $y = 0.6 \sin \frac{2}{5} \pi t$ 이다.

처음으로 흡입률이 -0.3리터/초가 되는 데 걸리는 시간은

$$-0.3 = 0.6 \sin \frac{2}{5} \pi t \text{ 에서 } \sin \frac{2}{5} \pi t = -\frac{1}{2}$$

$$\therefore \frac{2}{5} \pi t = \frac{7}{6} \pi \text{ 에서 } t = \frac{35}{12} \text{ (초)}$$

답 : ①

24. <풀이>

최초에 지면에 정지해 있었으므로, $t = 35$ 일 때의 열기구의 높이를 h 라 하면

$$\begin{aligned} h &= 0 + \int_0^{35} v(t) dt \\ &= \int_0^{20} t dt + \int_{20}^{35} (60 - 2t) dt \\ &= \left[\frac{t^2}{2} \right]_0^{20} + [60t - t^2]_{20}^{35} \end{aligned}$$

$$= \frac{400}{2} + 60(35 - 20) - (1225 - 400) = 275 \text{ (m)}$$

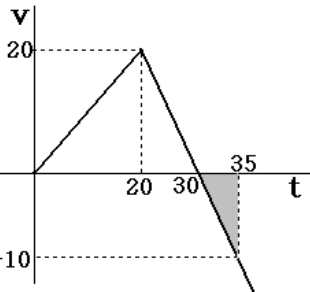
답 : ③

<별해>

$v-t$ 그래프에서의 정적분이 현위치이므로 그래프를 통해서 해결해 보자.

오른쪽 그림에서 35초일 때의 높이는 t 축 위의 넓이에서 t 축 아래의 어두운 부분의 넓이를 빼면 된다.

$$\therefore h = \frac{1}{2} \times 30 \times 20 - \frac{1}{2} \times 5 \times 10 = 300 - 25 = 275$$



주관식 문항 (25~30)

25. <풀이>

$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 3 \end{pmatrix} B$ 의 양변의 오른쪽에 B^{-1} 을 곱하면

$$AB^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\text{또한 } BA^{-1} = (AB^{-1})^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 3 \end{pmatrix}^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -7 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\therefore AB^{-1} + BA^{-1} = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$$

따라서 구하는 모든 성분의 합은 16이다.

답 : 16

26. <풀이>

$\frac{0}{0}$ 꼴의 무리식이므로 분모를 유리화하면

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -2} \frac{2x+4}{\sqrt{x+11}-3} &= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(2x+4)(\sqrt{x+11}+3)}{(x+11)-9} \\ &= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{2(x+2)(\sqrt{x+11}+3)}{x+2} \end{aligned}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -2} 2(\sqrt{x+11}+3) = 2(3+3) = 12$$

답 : 12

27. <풀이>

실계수 이차방정식의 허근은 켤레로 존재하므로

$b + \sqrt{3}i$ 이 한 근이면 $b - \sqrt{3}i$ 도 근이 된다.

이차방정식의 근과 계수의 관계에서

$$(b + \sqrt{3}i) + (b - \sqrt{3}i) = -6 \text{ 에서 } b = -3$$

$$(b + \sqrt{3}i)(b - \sqrt{3}i) = a \text{ 에서 } a = b^2 + 3 = 12$$

$$\therefore a + b = 12 + (-3) = 9$$

답 : 9

<별해>

$x = b + \sqrt{3}i$ 를 주어진 방정식에 대입하면

$$(b + \sqrt{3}i)^2 + 6(b + \sqrt{3}i) + a = 0$$

실수부분과 허수부분으로 나누어 정리하면

$$(b^2 + 6b + a - 3) + 2(b+3)\sqrt{3}i = 0$$

$$\therefore b^2 + 6b + a - 3 = 0, 2(b+3)\sqrt{3} = 0$$

$$\therefore a = 12, b = -3$$

28. <풀이>

$$n(A-B) = n(A) - n(A \cap B) \text{ 이므로}$$

$$n(C - (A \cup B)) = n(C) - n(C \cap (A \cup B))$$

.....㉠

$n(C - (A \cup B))$ 의 값이 최소일 때는

$n(C \cap (A \cup B))$ 의 값이 최대일 때이다.

여기서 $C \cap (A \cup B) = (C \cap A) \cup (C \cap B)$ 이므로

$$n(\mathcal{C}(A \cup B)) = n(\mathcal{C}A) + n(\mathcal{C}B) - n(A \cap B \cap C) \dots\dots \textcircled{L}$$

그런데 $n(A \cap B \cap C) = 5$ 로 일정하므로 $n(\mathcal{C}(A \cup B))$ 의 값이 최대일 때는 $n(\mathcal{C}A)$ 와 $n(\mathcal{C}B)$ 가 최대일 때이다.

$$n(A \cap B) = 10, \quad n(A \cap B \cap C) = 5 \text{ 이므로}$$

$$n((A \cap B) - C) = 10 - 5 = 5$$

$$\therefore n(\mathcal{C}A) \leq 14 - 5 = 9,$$

$$n(\mathcal{C}B) \leq 16 - 5 = 11$$

$\textcircled{L}$ 에서 $n(\mathcal{C}(A \cup B))$ 의 최대값은 $9 + 11 - 5 = 15$ 이므로 $\textcircled{I}$ 에서

구하는 최소값은 $19 - 15 = 4$ 이다.

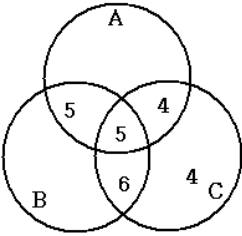
답 : 4

<별해>

벤 다이어그램을 그려보면 최소인 순간을 찾을 수 있다.

오른쪽 벤 다이어그램이 구하는 최소의 순간이다.

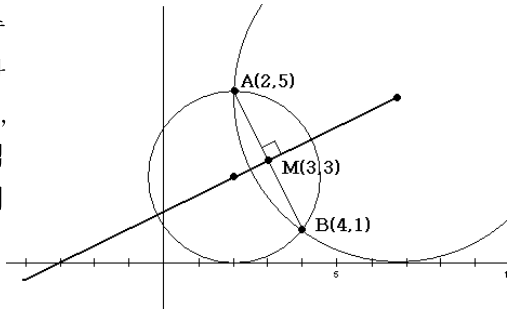
그러므로 최소값은 4이다.



29. <풀이>

두 원의 중심을 지나는 직선은 두 원의 공통현의 수직이등분선이다.

$\overline{AB}$ 의 중점을 M이라 하면, $M(3, 3)$ 이고, 직선 AB의 기울기는



$$\frac{1-5}{4-2} = -2$$

이므로 수직이등분선의 기울기는 $\frac{1}{2}$ 이다.

따라서 중심을 지나는 직선은 점 M을 지나고 기울기가 $\frac{1}{2}$ 인 직선이므로, 그 방정식은

$$y-3 = \frac{1}{2} (x-3)$$

공통외접선은 바로 x 축이므로 이 직선의 방정식에 $y=0$ 을 대입하면

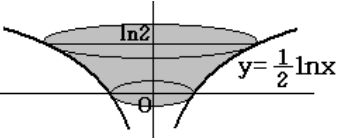
$$-3 = \frac{1}{2} (x-3) \text{ 에서 } x = -3$$

답 : -3

30. <풀이>

회전체의 부피는

$$V = \pi \int_0^{\ln 2} x^2 dy$$



$$y = \frac{1}{2} \ln x \text{ 에서 } x = e^{2y}$$

이므로

$$V = \pi \int_0^{\ln 2} e^{4y} dy$$

$$= \pi \left[\frac{e^{4y}}{4} \right]_0^{\ln 2}$$

$$= \frac{\pi}{4} (e^{4 \ln 2} - 1) = \frac{15}{4} \pi$$

$$(\because e^{4 \ln 2} = e^{\ln 16} = 16^{\ln e} = 16)$$

$$\therefore \frac{V}{\pi} = \frac{15}{4} = 3.75$$

답 : 3.75

출처 : 수학마을 수학교실에서 다운받아 편집한 것입니다. (<http://user.chollian.net/~msjeil/>)