

2003학년도 대학수학능력시험 모의평가 문제지

제 2 교시

수리 영역

자 연 계

성명	
----	--

수험번호				—					
------	--	--	--	---	--	--	--	--	--

1

- 먼저 수험생이 선택한 계열의 문제인지 확인하십시오.
- 문제지에 성명과 수험 번호를 정확히 기입하십시오.
- 답안지에 수험 번호, 응시 계열, 답을 표기할 때에는 반드시 ‘수험생이 지켜야 할 일’에 따라 표기하십시오.
- 주관식 답의 숫자에 0이 포함된 경우, 0을 OMR 답안지에 반드시 표기해야 합니다.
- 문항에 따라 배점이 다르니, 각 물음의 끝에 표시된 배점을 참고하십시오. 배점은 2점 또는 3점입니다.
- 계산은 문제지의 여백을 활용하십시오.

1. $a=\sqrt{1+\sqrt{2}}$ 일 때, $a^2+\frac{1}{a^2}$ 의 값은? [2점]
- ① $\sqrt{2}$ ② 2 ③ $2\sqrt{2}$
- ④ 4 ⑤ $2+2\sqrt{2}$

2. 서로 직교하는 두 벡터 $\vec{a}$ 와 $\vec{b}$ 에 대하여 $|\vec{a}|=2$ 이고 $|\vec{b}|=3$ 일 때, $|3\vec{a}-2\vec{b}|$ 의 값은? [2점]
- ① $3\sqrt{2}$ ② $4\sqrt{2}$ ③ $5\sqrt{2}$ ④ $6\sqrt{2}$ ⑤ $7\sqrt{2}$

3. $\cos 2\alpha = \frac{1}{5}$ 일 때, $\sec^2 \alpha$ 의 값은? [2점]
- ① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{2}{3}$ ③ 1 ④ $\frac{4}{3}$ ⑤ $\frac{5}{3}$

4. 정적분 $2\int_0^1 xe^{-x^2}dx$ 의 값은? [2점]
- ① $\frac{1}{e}$ ② $\frac{e-1}{e}$ ③ $\frac{e+1}{e}$
- ④ $e-1$ ⑤ $e+1$

5. 일차변환 f 는 직선 $y=x$ 위의 모든 점을 자기 자신으로 옮기고, f 의 역변환이 존재하지 않는다. f 를 나타내는 행렬을 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ 라 할 때, $a+d$ 의 값은? [3점]

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

6. 함수 $f(x) = x^n e^{-x}$ 에 대한 <보기>의 설명 중 옳은 것을 모두 고르면? (단, n 은 자연수) [3점]

—<보 기>—

- ㄱ. n 이 짝수일 때, $f(x)$ 의 최소값은 0이다.
 ㄴ. n 이 짝수일 때, $f(x)$ 는 $x=0$ 에서 극소값을 갖고 $x=n$ 에서 극대값을 갖는다.
 ㄷ. n 이 홀수일 때, $f(x)$ 는 $x=0$ 에서 극대값을 갖고 $x=n$ 에서 극소값을 갖는다.

- ① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
 ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

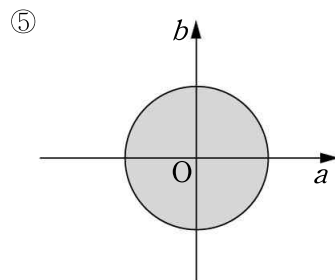
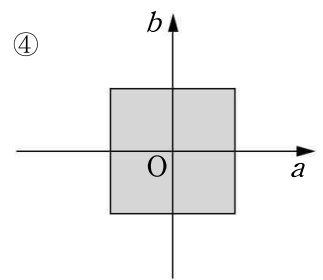
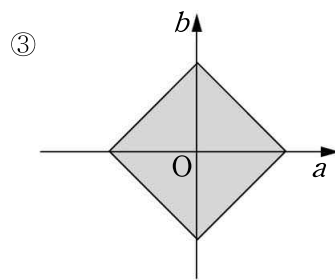
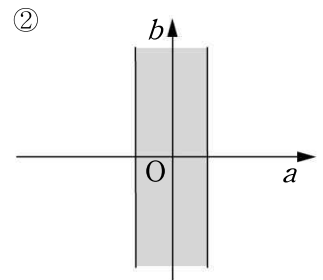
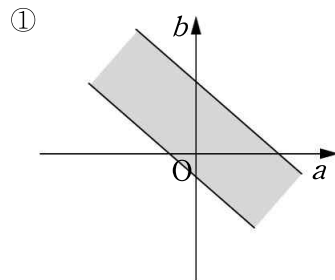
7. 다음 식의 값은? [3점]

$$\frac{1}{2^{-100}+1} + \frac{1}{2^{-99}+1} + \cdots + \frac{1}{2^{-1}+1} + \frac{1}{2^0+1} + \frac{1}{2^1+1} + \cdots + \frac{1}{2^{99}+1} + \frac{1}{2^{100}+1}$$

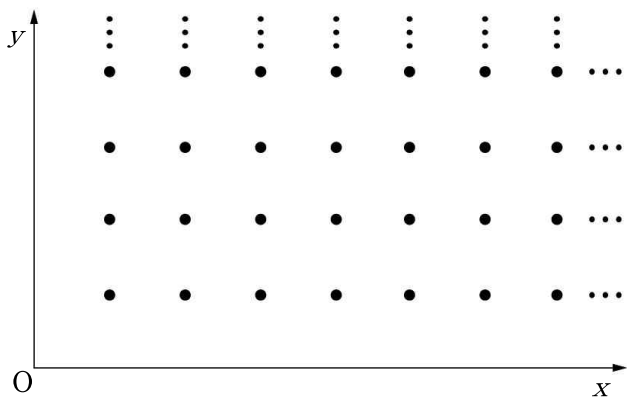
- ① 50 ② $\frac{101}{2}$ ③ 100 ④ $\frac{201}{2}$
 ⑤ 200

8. x 와 y 에 관한 다음 연립방정식이 실수해를 갖도록 하는 실수 a, b 의 순서쌍 (a, b) 를 좌표평면에 나타낸 것은? [3점]
 (단, 경계선 포함)

$$\begin{cases} x+y=1 \\ (x-a)^2+(y-b)^2=1 \end{cases}$$



9. 아래 그림은 x 좌표와 y 좌표가 모두 자연수인 격자점을 좌표평면에 나타낸 것이다.



위의 좌표평면에 직선 $y=ax$ 를 그렸을 때, <보기>의 설명 중 옳은 것을 모두 고르면?(단, $a>0$) [2점]

—<보 기>—

ㄱ. a 가 자연수일 때, 무수히 많은 격자점을 지난다.

ㄴ. a 가 유리수일 때, 지나는 격자점의 y 좌표는 등차수열을 이룬다.

ㄷ. a 가 무리수일 때, 적어도 하나의 격자점을 지난다.

- ① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
- ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

10. 자연수 n 에 대하여 $\sqrt{n}$ 의 정수 부분을 $f(n)$ 이라 하자.
예를 들면, $f(5) = 2$ 이다. 이때, $\sum_{n=1}^{120} \frac{1}{2f(n)+1}$ 의 값은?
[3점]

- ① 10 ② 12 ③ 20 ④ 24 ⑤ 36

11. 어느 상점에는 ㉠, ㉡, ㉢ 3개의 진열대가 있다. 9월 1일에 ㉠, ㉡, ㉢에 진열된 상품은 각각 A, B, C이다. 9월 2일부터 아래의 규칙에 따라 상품을 진열할 때, 같은 해 9월 30일에 진열될 상품을 바르게 나타낸 것은? [2점]

규칙 1: 홀수 날에는 전날 ㉠에 진열되었던 상품을 ㉡로, ㉡의 상품을 ㉢로, ㉢의 상품을 ㉠로 옮겨 진열한다.

규칙 2: 짝수 날에는 전날 ㉡와 ㉢에 진열되었던 상품을 서로 바꾸어 진열한다.

	㉠	㉡	㉢
①	A	B	C
②	A	C	B
③	B	A	C
④	B	C	A
⑤	C	B	A

12. 함수 $y=\log_2(x+1)+1$ 의 그래프가 x 축 및 y 축과 만나는 두 점을 지나는 직선의 기울기는? [2점]

- ① -2 ② -1 ③ 1 ④ 2 ⑤ 4

13. 자연수에서 정의된 함수 $f(n)$ 에 대하여 다음이 성립한다.

$$f(1)=1, \quad f(n)=1+f(m)$$

(단, m 은 n 이 아닌 n 의 가장 큰 약수이다.)

예를 들면, $f(3)=1+f(1)=2$ 이다.

이때, <보기>의 설명 중 옳은 것을 모두 고르면? [3점]

—<보 기>—

ㄱ. p 와 q 가 소수이면 $f(p)=f(q)$ 이다.

ㄴ. n 이 1보다 큰 홀수이면 $f(n)=1+f\left(\frac{n-1}{2}\right)$ 이다.

ㄷ. n 이 짝수이면 $f(n)=1+f\left(\frac{n}{2}\right)$ 이다.

① ㄱ

② ㄱ, ㄴ

③ ㄱ, ㄷ

④ ㄴ, ㄷ

⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

14. 오른쪽 그림과 같이 $\omega^3=1$ ($\omega \neq 1$)인 복소수 ω 에 대하여 $1, \omega, \omega^2$ 을 세 꼭지점으로 갖는 정삼각형이 복소평면 위에 있다.

$|z|=2$ 인 원 위의 점

$P(z)$ 와 이 정삼각형의 각

꼭지점 사이의 거리의 곱

$|z-1| \cdot |z-\omega| \cdot |z-\omega^2|$ 의

최대값은? [3점]

① 5

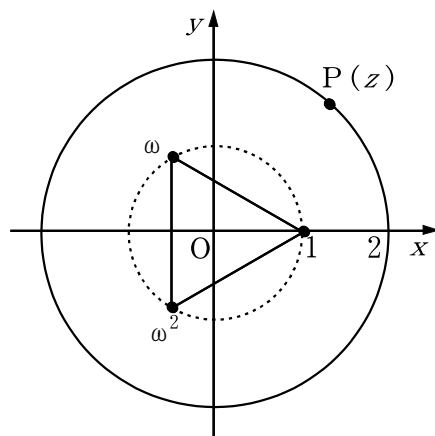
② 6

③

7

④ 8

⑤ 9



15. 8개의 전구가 있다. 전구마다 스위치가 달려 있어서 스위치를 누르면 전구가 켜지고 다시 누르면 꺼진다.

전구가 모두 꺼져 있는 상태에서 학생 A가 임의로 3개의 스위치를 한 번씩 누르고 간 후, 학생 B도 임의로 3개의 스위치를 한 번씩 누르고 갔다. 이때, <보기>의 설명 중 옳은 것을 모두 고르면? [3점]

—<보 기>—

ㄱ. 꺼져 있는 전구의 수는 짝수이다.

ㄴ. 2개의 전구만 켜지는 경우는 없다.

ㄷ. 4개의 전구가 켜질 확률이 6개의 전구가 켜질 확률보다 더 크다.

① ㄱ

② ㄴ

③ ㄱ, ㄷ

④ ㄴ, ㄷ

⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

16. 확률변수 X 와 Y 는 각각 정규분포 $N(0, 1^2)$ 과 $N(1, 2^2)$ 을 따르고, 확률 a, b, c 는 다음과 같다.

$$a = P(-1 < X < 1)$$

$$b = P(1 < Y < 5)$$

$$c = P(-5 < Y < -1)$$

이때, a, b, c 의 대소 관계는? [3점]

① $a=b=c$

② $b=c < a$

③ $a < b < c$

④ $b < a < c$

⑤ $c < b < a$

17. 다음은 임의의 자연수 n 에 대하여 $n+1$ 이 3의 배수이면 n 의 양의 약수의 합이 3의 배수임을 증명한 것이다.

<증명>
자연수 n 에 대하여 $n+1$ 이 3의 배수이면, n 은 $3k+2$ 꼴이다. (단, k 는 음이 아닌 정수)
 $3k+1$ 꼴의 수들의 곱은 (가) 꼴이므로, n 의 소인수 중에는 $3k+2$ 꼴이 반드시 있다.
그런데 $3k+2$ 꼴의 수를 짝수 번 곱하면 $3k+1$ 꼴의 수가 되므로, n 의 소인수 중 $3k+2$ 꼴이면서 그 지수가 (나)인 것이 있다. 그 소인수를 p 라 하고 p 의 지수를 m 이라 하면, p 와 서로소인 자연수 N 에 대하여 $n=N \cdot p^m$ 과 같이 나타내어진다.
이때, p^m 의 양의 약수의 합 $1+p+p^2+\cdots+p^{m-1}+p^m$ 은 (다) 꼴이고, n 의 양의 약수의 합은 N 의 양의 약수의 합과 p^m 의 양의 약수의 합의 곱이다. 따라서 n 의 양의 약수의 합은 3의 배수이다.

위의 증명에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것은? [3점]

(가)	(나)	(다)
① $3k+1$	홀수	$3k$
② $3k+1$	짝수	$3k+2$
③ $3k+1$	홀수	$3k+1$
④ $3k+2$	짝수	$3k$
⑤ $3k+2$	홀수	$3k+2$

18. 다음은 예각삼각형 ABC에서 세 내각의 크기를 A, B, C 로 나타낼 때, $A < B < C$ 이면 $\sin 2A > \sin 2B > \sin 2C$ 임을 증명한 것이다.

<증명>
오른쪽 그림에서 점 O를 삼각형 ABC의 외심이라 하고, 선분 AO의 연장선이 변 BC와 만나는 점을 D라 하자.
점 O가 외심이므로
 $\angle AOB = 2C$ 이고
 $\angle AOC = 2B$ 이다.
 $B < C$ 이므로 다음을 얻는다.
 $\overline{BD}$ (가) $\overline{CD}$㉠
또한, 삼각형 BOD와 COD의 넓이는 각각 다음과 같다.
 $\triangle BOD = \frac{1}{2} \overline{OB} \cdot \overline{OD} \sin ($ (나) $)$
 $\triangle COD = \frac{1}{2} \overline{OC} \cdot \overline{OD} \sin ($ (다) $)$
㉠에 의하여 $\triangle BOD < \triangle COD$ 이므로 $\sin 2B > \sin 2C$ 이다.
마찬가지로, $\sin 2A > \sin 2B$ 가 성립한다.

위의 증명에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것은? [3점]

	(가)	(나)	(다)
①	$>$	B	C
②	$>$	$2B$	$2C$
③	$>$	$2C$	$2B$
④	$<$	$2B$	$2C$
⑤	$<$	$2C$	$2B$

19. 좌표공간에 두 점 $P(0, 0, 5)$ 와 $Q(a, b, 4)$ 를 잇는 직선 l 과 방정식이 $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 4$ 인 구 S 가 있다. 이 직선 l 과 구 S 를 xy 평면에 정사영시켜 얻은 두 도형이 서로 접할 때, $\frac{a}{b}$ 의 값은?(단, $b \neq 0$) [3점]

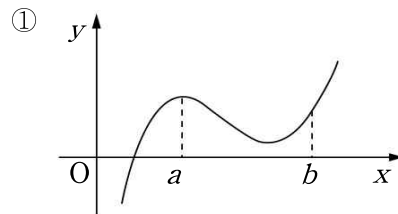
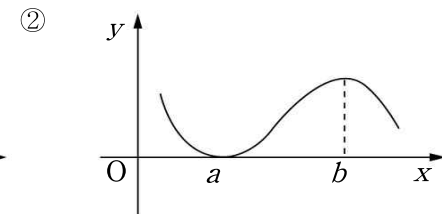
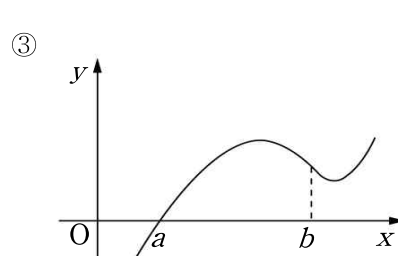
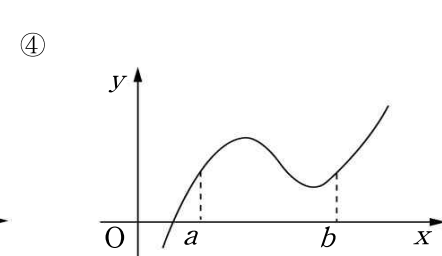
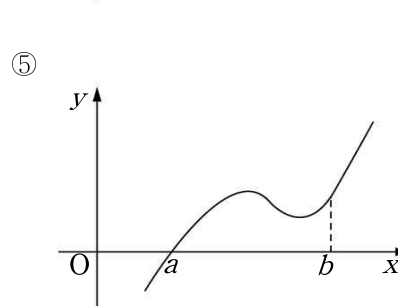
- ① -2 ② $-\frac{3}{2}$ ③ -1 ④ $-\frac{3}{4}$ ⑤ $-\frac{2}{3}$

20. 삼차함수 $f(x)$ 는 극값을 갖고 두 실수 a 와 b 에 대하여 다음을 만족시킨다. (단, $0 < a < b$)

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{x-a} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow b} \frac{f(x)-1}{x-b} = 2$$

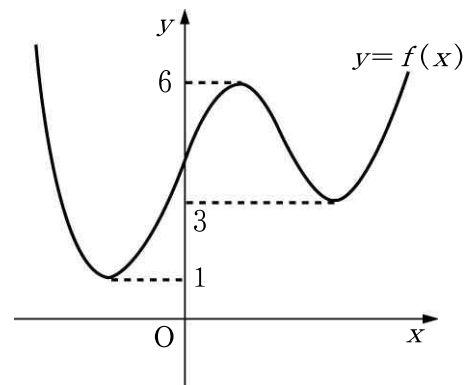
이때, $y = f(x)$ 의 그래프의 개형은? [3점]

- ① 
- ② 
- ③ 
- ④ 
- ⑤ 

21. 사차함수

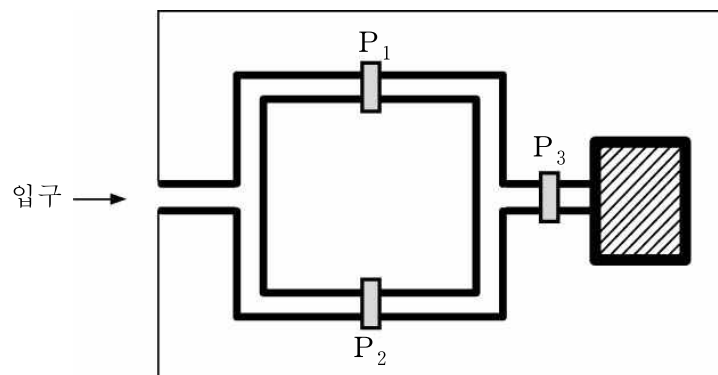
$y = f(x)$ 의 그래프가 오른쪽 그림과 같다. 이때, 다음 무리방정식의 실근의 개수는? [3점]

$$f(x) = 2 + \sqrt{f(x)}$$



- ① 1 ② 3 ③ 4 ④ 6 ⑤ 7

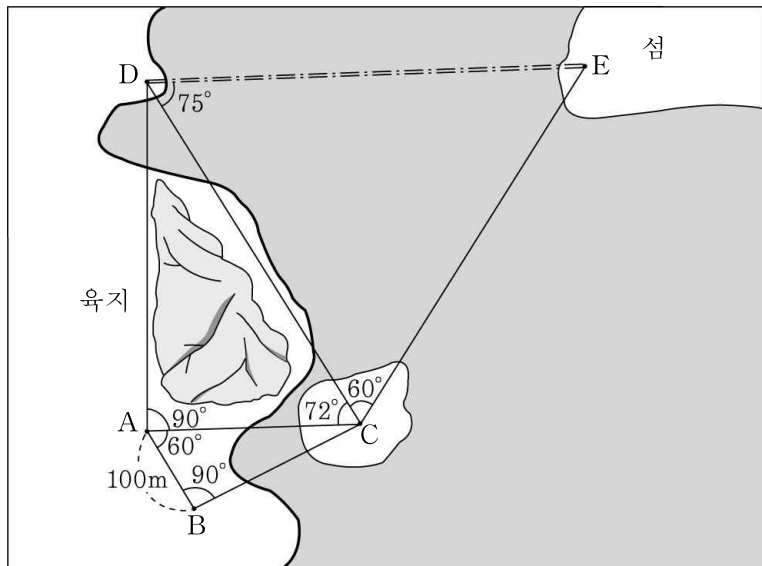
22. 첨단 기술을 연구하는 어느 연구소 안의 통로는 아래 그림과 같다. 그림에 표시된 P_1, P_2, P_3 세 지점에는 보안을 위하여 검색대가 설치되어 있다.



이 연구소의 연구원 중에서 P_1, P_2, P_3 지점을 통과할 수 있는 연구원의 집합을 각각 A_1, A_2, A_3 이라고 할 때, 연구소의 입구에서 출발하여 빗금 친 방까지 갈 수 있는 연구원 전체의 집합은? [2점]

- ① $A_1 \cap (A_2 \cup A_3)$ ② $A_2 \cap (A_1 \cup A_3)$
 ③ $A_1 \cup (A_2 \cap A_3)$ ④ $(A_1 \cup A_2) \cap A_3$
 ⑤ $(A_1 \cap A_2) \cup A_3$

23. 아래 그림과 같이 육지의 D 지점과 섬의 E 지점 사이를 연결하는 다리를 건설하려고 한다. 지점 A, B, C를 정하고, A와 B 사이의 거리 및 각 지점 사이의 각의 크기를 측정하였더니 아래 그림과 같았다. 이때, D와 E 사이의 거리는? (단, 각 지점 A, B, C, D, E의 해발고도는 모두 같고, $\frac{1}{\cos 72^\circ} = 3.24$ 로 한다.) [3점]



- ① $324\sqrt{3}$ m ② $324\sqrt{6}$ m ③ 648 m
④ $648\sqrt{3}$ m ⑤ $648\sqrt{6}$ m

24. 한 사회의 인구 분포에 따른 경제 구조를 판단하는 기준으로 부양비, 노령화지수, 노년부양비가 사용된다. 0~14세의 유소년 인구를 P_1 , 15~64세의 생산연령인구를 P_2 , 65세 이상의 노년인구를 P_3 로 구분할 때, 부양비, 노령화지수, 노년부양비는 다음과 같다.

$$(\text{부양비}) = \frac{P_1 + P_3}{P_2} \times 100$$

$$(\text{노령화지수}) = \frac{P_3}{P_1} \times 100$$

$$(\text{노년부양비}) = \frac{P_3}{P_2} \times 100$$

2025년의 부양비를 50, 노령화지수를 80이라고 가정하였을 때, 2025년의 노년부양비는? [3점]

- ① $\frac{100}{9}$ ② $\frac{200}{9}$ ③ $\frac{100}{3}$ ④ $\frac{400}{9}$
⑤ $\frac{500}{9}$

주관식 문항 (25 ~ 30)

25. 전체집합 $U = \{x | x \text{는 } 20 \text{ 이하의 자연수}\}$ 의 세 부분집합 A, B, C는 다음과 같다.

$$A = \{x | x \text{는 소수}\}$$

$$B = \{x | x \text{는 } 3 \text{의 배수}\}$$

$$C = \{x | x \text{는 } 5 \text{의 배수}\}$$

이때, $(B \cup C) \cap A^c$ 의 원소의 개수를 구하시오. (단, A^c 은 A의 여집합이다.) [2점]

26. 타원 $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{36} = 1$ 의 두 초점을 F와 F'이라 하고, 이 타원과 원 $(x+8)^2 + y^2 = 9$ 와의 교점 중 하나를 P라 하자. 이때, 두 선분 PF와 PF'의 길이의 곱 $\overline{PF} \cdot \overline{PF'}$ 을 구하시오. [2점]

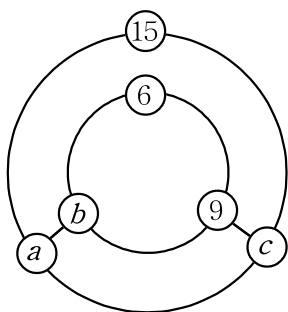
27. 모든 자연수 n 에 대하여 수열 $\{a_n\}$ 은 다음을 만족시킨다.

$$\sum_{k=1}^n \frac{a_1 + \cdots + a_k}{k} = (n+1)^2$$

이때, a_{10} 의 값을 구하시오. [3점]

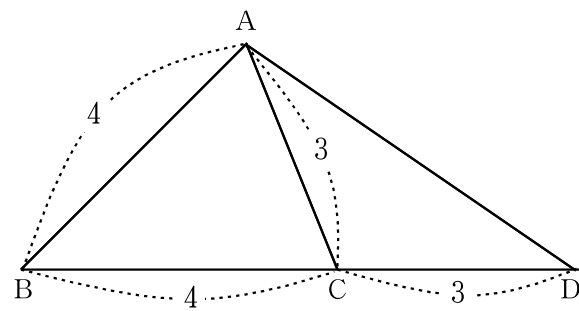
28. 오른쪽 그림과 같이 여섯 개의 수 6, 9, 15, a , b , c 가 배열되어 있고, a , b , c 는 선을 따라 인접하고 있는 세 수의 산술평균과 같다. 예를 들면, b 는 $a, 6, 9$ 의 산술평균이다. 이때, a 의 값을 구하시오.

[3점]



29. -1 이 아닌 실수 x 에 대하여 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^n + 20}{x^{n+1} + 2}$ 의 최대값을 구하시오. [3점]

30. 아래 그림과 같이 삼각형 ABC에서 $\overline{AB} = 4$, $\overline{BC} = 4$, $\overline{CA} = 3$ 이고, 변 BC의 연장선 위에 점 D를 $\overline{CD} = 3$ 이 되도록 잡을 때, $\overline{AD}^2$ 의 값을 소수점 아래 둘째 자리까지 구하시오. [3점]



* 확인 사항

- 문제지와 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.
- 문제지와 답안지를 함께 제출합니다. 답안지는 오른쪽에 문제지는 왼쪽에 놓으시오.