

년도	2001 11월 7일
대상	고3 자연계

1. 무리방정식 $x - \sqrt{3})(\sqrt{x} + \sqrt{3}) = 4$ 의 근은?
[2점][2002학년도 수능]
- ① 1 ② 3 ③ 5
④ 7 ⑤ 9

2. 두 벡터 $\vec{a} = (2, -3, 2)$ $\vec{b} = (1, -4, 0)$ 가 이루는
각의 크기를 θ 라 할 때, $\cos \theta$ 의 값은?
[2점][2002학년도 수능]
- ① $\frac{2}{17}$ ② $\frac{5}{17}$ ③ $\frac{8}{17}$
④ $\frac{11}{17}$ ⑤ $\frac{14}{17}$

3. 복소수 z 가 $|z| = \sqrt{2}$ 일 때, $\frac{z}{z+1}$ 의 값은?
[2점][2002학년도 수능]
- ① -1 ② $-\frac{1}{2}$ ③ 0
④ $\frac{1}{2}$ ⑤ 1

4. 다음 식을 성립하게 하는 상수 a, b 의 곱 ab 의 값
은?
[2점][2002학년도 수능]

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x^2+ax+b} = \frac{1}{3}$$

① -3 ② -2 ③ 1
④ 2 ⑤ 3

5. 방정식 $x^2 - y^2 + 2y + a = 0$ 이 나타내는 도형이 x 축
에 평행인 주축을 갖는 쌍곡선이 되기 위한 a 의 값의
범위는?
[2점][2002학년도 수능]
- ① $a < -1$ ② $a > -1$ ③ $a < 1$
④ $a > 1$ ⑤ $a > 2$

6. 함수 $f(x) = 2\sin^3 x + \sin 2x \cos x + 2\cos x$ 의 최대값
은?
[2점][2002학년도 수능]
- ① $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ② 1 ③ $\sqrt{2}$
④ 2 ⑤ $2\sqrt{2}$

7. a, b, c 를 구 $x + y^2 + z^2 = 4$ 위의 한 점의 좌표라고 할 때, 두 평면 $ax + by + cz = 1$, $ax + by + cz = 3$ 사이의 최단거리는?

[2점][2002학년도 수능]

- ① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\frac{3}{2}$
④ 2 ⑤ $\frac{11}{3}$

8. 세 자료

: 1부터 50까지의 자연수

B: 51부터 100까지의 자연수

C: 1부터 100까지의 짝수

의 표준편차를 순서대로 a, b, c 라 할 때, a, b, c 의 대소관계를 바르게 나타낸 것은?

[3점][2002학년도 수능]

- ① $a = b = c$ ② $a = b < c$ ③ $a < b = c$
④ $a < b < c$ ⑤ $a < c < b$

9. $1 \leq x \leq 2$ 인 모든 실수 x 에 대하여 부등식

$\alpha x \leq e^x \leq \beta x$ 가 성립하도록 상수 α, β 를 정할 때, $\beta - \alpha$ 의 최소값은?

[3점][2002학년도 수능]

- ① $\frac{e}{2}$ ② e ③ $e^{\frac{e^3}{4} - 1}$
④ $e^{\left(\frac{e^2}{3} - 1\right)}$ ⑤ $e^{\frac{e}{2} - 1}$

10. 연립부등식 $x > 0$, $y + x \geq 0$, $y - 2x \leq 0$ 이 나타내는 좌표평면 위의 영역을 D라 하자. D에 속하는 두 점 $P(a, b)$, $Q(c, d)$ 에 대하여 $\frac{b+d}{a+c}$ 의 최대값과 최소값의 차는?

[3점][2002학년도 수능]

- ① $\frac{2}{3}$ ② $\frac{4}{3}$ ③ 2
④ 3 ⑤ $\frac{10}{3}$

11. 지수함수의 그래프에 대한 <보기>의 설명 중 옳은 것을 모두 고른 것은?

[2점][2002학년도 수능]

[보 기]

ㄱ. $y = 2^x$ 의 그래프를 x 축에 대하여 대칭이동하면 $y = \frac{1}{2^x}$ 의 그래프가 된다.

ㄴ. $y = 2^x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 1만큼 평행이동하면 $y = 2^x$ 의 그래프보다 아래에 놓이게 된다.

ㄷ. $y = 2 \cdot 2^x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 평행이동하여 $y = 2^x$ 의 그래프를 얻을 수 있다.

- ① ㄱ ② ㄴ ③ ㄴ, ㄷ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

12. 수열 $\{a_n\}$ 이

$$\sqrt{17} - 4 = \frac{1}{8 + a_1} = \frac{1}{8 + \frac{1}{8 + a_2}} = \frac{1}{8 + \frac{1}{8 + \frac{1}{8 + a_3}}} = \dots$$

을 만족시킬 때, a_{2002} 의 값은?

[3점][2002학년도 수능]

- ① $\sqrt{17} - 4$ ② $3 - \sqrt{17}$ ③ $5 - \sqrt{17}$
④ $\sqrt{17}$ ⑤ $\sqrt{17} + 4$

- 13.** 어떤 종류의 연산회로는 행렬들로 나타낼 수 있다. 이 연산회로의 입력과 출력은 행렬 $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ 로, 연산자 $\square$ 는 2차 정사각행렬 U 로 표현된다. 기본 연산회로 $a \rightarrow \square U$ 는 U 를 수행하고 $a \rightarrow \square U \Rightarrow \square V$ 는 VU_a 의 행렬연산을 수행한다. 다음은 연산자 $\square X$, $\square Y$, $\square Z$ 에 대응되는 행렬이다.
- $$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, Z = \frac{2}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$
- 입력 $a = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ 를 연산회로

$$a \rightarrow \square Z \Rightarrow () \Rightarrow \square X$$

에서 수행한 결과가 $\frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ 일 때, 다음 중 (가)에 알맞은 것은?

[3점][2002학년도 수능]

- ① $\square Z \Rightarrow \square X$ ② $\square Z \Rightarrow \square Y$ ③ $\square X \Rightarrow \square X$
 ④ $\square Y \Rightarrow \square Y$ ⑤ $\square Y \Rightarrow \square X$

- 14.** 한 평면에 서로 다른 n 개의 직선을 그려서 나누어진 영역의 수의 최소값을 $f(n)$, 최대값을 $g(n)$ 이라 하자.
- <보기>의 설명 중 옳은 것을 모두 고른 것은?

[3점][2002학년도 수능]

— [보 기] —

ㄱ. $f(2) = 3, g(2) = 4$ 이다.
 ㄴ. 모든 n 에 대하여 $f(n) = n + 1$ 이다.
 ㄷ. 모든 n 에 대하여 $g(n) \leq f(n + 1)$ 이다.

- ① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
 ④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

- 15.** 다음을 만족하는 다항함수에 대한 <보기>의 설명 중 옳은 것을 모두 고른 것은?
- [3점][2002학년도 수능]

$$f_0(x) = 1, f_1(x) = x, \\ f_{n+1}(x) = xf_n(x) + f_{n-1}(x) \quad (n \text{은 자연수})$$

— [보 기] —

ㄱ. $f_{2n-1}(0) = 0, f_{2n}(0) = 1$ 이다.
 ㄴ. $f_{2n-1}(x)$ 는 기함수이고, $f_{2n}(x)$ 는 우함수이다.
 ㄷ. $f_{2n-1}(x)$ 와 $f_{2n}(x)$ 의 항의 개수는 각각 n 개이다.

- ① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
 ④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

- 16.** 함수 $f(x) = [x[x]]$ 에 대한 <보기>의 설명 중 옳은 것을 모두 고른 것은?
- (단, $[x]$ 는 x 보다 크지 않은 최대의 정수이다.)
- [3점][2002학년도 수능]

— [보 기] —

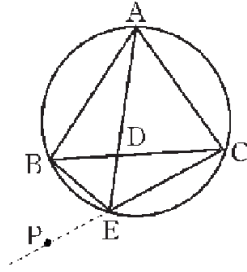
ㄱ. $f(x) = -1$ 이 되는 x 는 존재하지 않는다.
 ㄴ. 자연수 n 에 대해서 집합 $\{f(x) \mid n \leq x < n + 1\}$ 의 원소의 개수는 n 개다.
 ㄷ. 자연수 n 에 대해서 집합 $\{f(x) \mid -n \leq x < -n + 1\}$ 의 원소의 개수는 $n + 1$ 개이다.

- ① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
 ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

17. 다음은 정삼각형 ABC의 변 BC 위의 한 점 D를 잡아 직선 AD가 △ABC의 외접원과 만나는 점을 E라 할 때,

$$DE = \frac{1}{EB} + \frac{1}{CE}$$

임을 보인 것이다.



— [증 명] —

선분 CE의 연장선 위에 $EB = EP$ 인 점 P를 잡는다.

네 점 A, B, E, C는 한 원 위에 있으므로

$\angle AEC = \angle ABC = 60^\circ$ 이고

$\angle AEB = \angle ACB = 60^\circ$ 이다.

따라서 $\angle EPB = 60^\circ$ 이고 $EB = EP$ 이므로

△EBP는 정삼각형이다.

그러므로 $\angle BPE = 60^\circ = \angle DEC$ 이고

선분 BP와 DE는 평행하다.

△CBP와 △CDE는 닮음이므로

$BP : DE = CP : CE$ 이고

$BP \cdot CE = DE \cdot CP$ 이다.

또한 $BP = EP = EB$, $CP = CE + EP$ 이므로

$EB \cdot CE = DE \cdot (CE + EP) = DE \cdot (CE + EB)$

가 된다.

양변을 $EB \cdot CE \cdot DE$ 로 나누면

$$\frac{1}{DE} = \frac{1}{EB} + \frac{1}{CE} \text{ 이다.}$$

위의 증명에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것은?

[3점][2002학년도 수능]

- | (가) | (나) | (다) |
|----------------|--------------|-----------------|
| ① $\angle PEB$ | $\angle BPE$ | $\overline{CE}$ |
| ② $\angle PEB$ | $\angle BPE$ | $\overline{CD}$ |
| ③ $\angle EBP$ | $\angle CBE$ | $\overline{CE}$ |
| ④ $\angle PEB$ | $\angle DCE$ | $\overline{CD}$ |
| ⑤ $\angle PEB$ | $\angle BED$ | $\overline{CD}$ |

18. 다음은 자연수 m, n 에 대해서 $m + 4^n$ 이 소수이고 $m \neq 1$ 또는 $n \neq 1$ 이면, m 은 홀수이고 n 은 짝수임을 증명한 것이다.

— [증 명] —

m 이 짝수이거나 n 이 홀수라 가정하자.

(i) m 이 짝수이면 $m = 2j$ 꼴의 정수이고,

$$m^4 + 4^n = 4 \cdot 4j^4 + 4^{n-1}$$

$$m^4 + 4^n \text{은 } (가) \text{ 이다.}$$

이것은 가정에 모순이므로 m 은 홀수이다.

(ii) n 이 홀수이면 $n = 2k - 1$ 꼴의 정수이다.

$$m^4 + 4^n = m^4 + 4^{2k-1}$$

인수분해 된다.

$$m^4 + 4^{2k-1} = (m^2 + m2^k + 2 \cdot 4^{k-1})(m^2 + m2^k + 2 \cdot 4^{k-1})$$

이 수는 소수이므로 $(가) = 1$ 또는

$$(m^2 + m2^k + 2 \cdot 4^{k-1}) = 1 \text{ 이다.}$$

그런데, $(m^2 + m2^k + 2 \cdot 4^{k-1}) > 1$ 이므로

$$(나) = 1 \text{ 이다.}$$

$$(나) = (m^2 + m2^k + 2 \cdot 4^{k-1})^2 + 4^{k-1} = 1 \text{로부터}$$

$k = 1, m = 1$ 이다.

따라서, $m = 1, n = 1$ 이다.

이것은 가정에 모순이므로 n 은 짝수이다.

위의 증명에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것은?

[3점][2002학년도 수능]

(가) (나) (다)

- | | | |
|------------|--|---------------|
| ① 소수가 아니다. | $m^2 - m \cdot 2^k + 2 \cdot 4^{k-1}$ | $m - 2^{k-1}$ |
| ② 소수이다. | $m^2 - m \cdot 2^k + 2 \cdot 4^{k-1}$ | $m - 2^{k-1}$ |
| ③ 소수가 아니다. | $m^2 - m \cdot 2^{k+1} + 5 \cdot 4^{k-1}$ | $m - 2^k$ |
| ④ 소수이다. | $m^2 - m \cdot 2^{k+1} + 5 \cdot 4^{k-1}$ | $m - 2^k$ |
| ⑤ 소수가 아니다. | $m^2 - m \cdot 2^{k+2} + 17 \cdot 4^{k-1}$ | $m - 2^{k+1}$ |

19. 두 함수 $f(x) = ax + b$ 와 $g(x) = e^x$ 가

$$f(g(x)) = \int_0^x f(t)g(t)dt - xe^x + 3$$

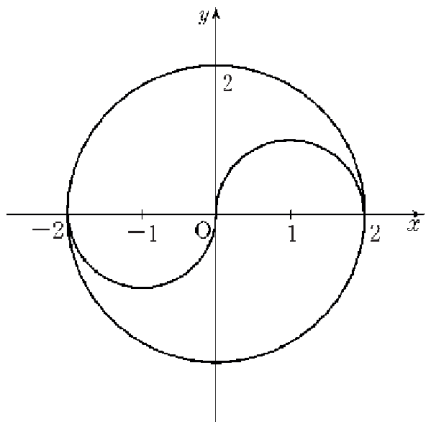
을 만족할 때, $f(2)$ 의 값은?

[3점][2002학년도 수능]

- ① 4 ② 2 ③ 0
④ -2 ⑤ -4

20. 그림과 같이 좌표평면 위에 원과 반원으로 이루어진 태극문양이 있다. 태극문양과 직선 $y = a(x-1)$ 이 서로 다른 다섯 점에서 만나게 되는 a 의 범위는?

[3점][2002학년도 수능]



- ① $0 < a < \frac{2}{3}$ ② $0 < a < \frac{\sqrt{3}}{3}$ ③ $0 < a < \frac{2}{3}$
④ $0 < a < \frac{\sqrt{5}}{3}$ ⑤ $0 < a < \frac{\sqrt{6}}{3}$

21. 함수 $f(x) = x^2 - x - 6$, $g(x) = x^2 - ax + 4$ 일 때, 모든 실수 x 에 대하여 $(f \circ g)(x) \geq 0$ 이 되는 실수 a 의 범위는? (단, $f \circ g$ 는 g 와 f 의 합성함수이다.)

[3점][2002학년도 수능]

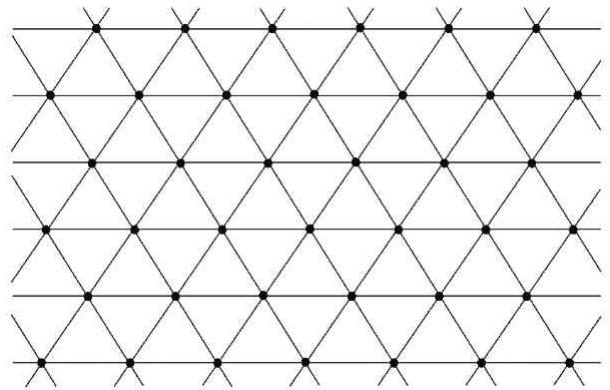
- ① $a \leq -1, a \geq 1$ ② $-1 \leq a \leq 1$ ③ $a \leq -2, a \geq 2$
④ $-2 \leq a \leq 2$ ⑤ $-4 \leq a \leq 4$

22. 어떤 물질은 원자를 구로 나타낼 경우 똑같은

구들을 규칙적으로 배열하여 얻은 정육각형 격자구조를 갖는다. 아래 그림은 이 격자구조의 한 단면에 놓여 있는 원자의 중심을 연결한 것이다.

이 구조에서 한 원자의 에너지는 인접한 원자의 수와 거리에 영향을 받는다. 가장 인접한 원자의 중심간의 거리가 모두 1일 때, 동일 평면상에서 고정된 한 원자와 중심사이의 거리가 $\sqrt{7}$ 인 원자의 개수는?

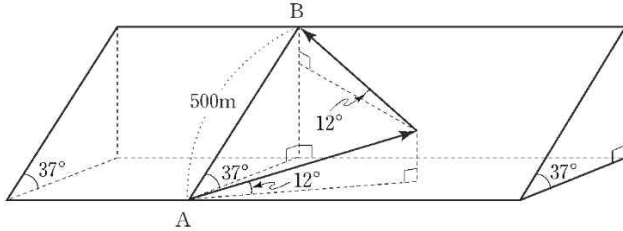
[3점][2002학년도 수능]



- ① 4 ② 6 ③ 8
④ 12 ⑤ 16

- 23.** 직선거리가 00m인 A지점과 B지점을 연결하는 도로를 건설하려고 했지만, 경사도가 37° 여서 우회도로가 필요하였다. 그래서 그림과 같이 12° 의 경사도를 유지하는 도로를 건설하기로 결정하였다. A지점에서 B지점까지 이 우회도로의 거리는 약 몇 m인가?
(단, $\sin 12^\circ = 0.2$, $\sin 37^\circ = 0.6$ 으로 계산한다.)

[3점][2002학년도 수능]



- ① 800m ② 1000m ③ 1200m
④ 1500m ⑤ 1800m

- 24.** 중심도시에서 상품을 구매하는 주변도시의 전체 구매량은 다음과 같은 법칙을 따른다고 하자.
“각 주변도시 B, C의 시민들이 중심도시 A에서 상품을 구매할 때, 각 도시의 전체 구매량은 그 도시의 인구수에 비례하고 A시와의 거리의 제곱에 반비례한다.”
위 법칙과 아래 표에 의거하여 신도시 C시를 건설하려고 한다.

구분 도시	인구 (단위 : 명)	A시로부터의 거리 (단위 : km)
B시	500000	20
C시	x	10

A시에서 구매하는 C시의 전체의 구매량이 B시의 전체 구매량의 절반이 되게 하려면 C시의 인구 x 를 얼마로 예상해야 하는가?

[3점][2002학년도 수능]

- ① 42500 ② 52500 ③ 62500
④ 72500 ⑤ 82500

주관식 문항(25 ~ 30)

- 25.** 행렬 $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ 에 대하여 $\sum_{n=1}^{2002} A^n = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

일 때, $a+b+c+d$ 의 값을 구하시오.

[3점][2002학년도 수능]

- 26.** 함수 $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{2n+4} + 2x}{x^{2n} + 1}$ 일 때, $f\left(\frac{1}{2}\right) + f(2)$

의 값을 구하시오.

[2점][2002학년도 수능]

- 27.** $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ 일 때, $\{2, 3\} \cap A \neq \emptyset$ 를 만족시키는 U 의 부분집합 A 의 개수를 구하시오.

[3점][2002학년도 수능]

28. 다음 방정식의 모든 해의 곱을 구하시오.

[2점][2002학년도 수능]

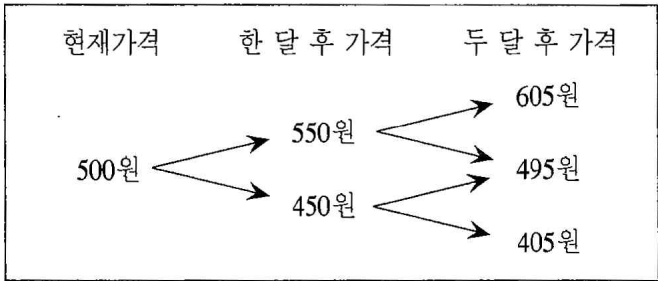
$$\log x)^3 + \log_2 x^3 = 4(\log_2 x)^2 + \log_2 x$$

29. 어떤 행사에서 20종류의 스티커를 모으면 경품을 받을 수 있다고 한다. 갑은 네 종류, 을과 병은 각각 다섯 종류의 스티커를 모았다. 두 사람씩 비교하였을 때 각각 세 종류의 스티커가 공통으로 있었고, 세 사람을 함께 비교하였을 때는 두 종류의 스티커가 공통으로 있었다. 갑, 을, 병의 스티커를 모아서 경품을 받으려고 할 때, 최소로 더 필요한 스티커의 종류의 수를 구하시오.

[3점][2002학년도 수능]

30. 어떤 상품의 가격은 매달 0.5의 확률로 10% 상승하거나 0.5의 확률로 10% 하락한다. 이 상품의 현재 가격은 500원이다. 두 달 후, 이 상품의 가격이 500원 이하이면 500원에서 두 달 후 상품 가격을 뺀 금액을 받고, 500원 이상이면 받지 않기로 하였다. 두 달 후 받을 수 있는 금액의 기대값을 소수점 아래 둘째 자리까지 구하시오.
(단, 첫 번째 달의 가격변동과 두 번째 달의 가격변동은 서로 독립이다.)

[3점][2002학년도 수능]



정답과 해설

1) 정답 ④

$$(x - \sqrt{3})(\sqrt{x} + \sqrt{3}) = 4, \quad x - 3 = 4$$

$$\therefore x = 7$$

2) 정답 ⑤

$$|\vec{a}| = \sqrt{2^2 + (-3)^2 + 2^2} = \sqrt{17}$$

$$|\vec{b}| = \sqrt{1^2 + (-4)^2 + 0^2} = \sqrt{17}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 2 \cdot 1 + (-3) \cdot (-4) + 2 \cdot 0 = 14$$

$$\therefore \cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{14}{\sqrt{17} \sqrt{17}} = \frac{14}{17}$$

3) 정답 ④

$$|z| = 1 \text{에서 } |z|^2 = |\bar{z}|^2 = z\bar{z} = 1$$

$$\therefore \frac{z\bar{z}}{z\bar{z} + 1} = \frac{1}{1 + 1} = \frac{1}{2}$$

4) 정답 ②

$$\lim_{x \rightarrow 1} (x - 1) = 0 \text{이므로}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + ax + b) = 1 + a + b = 0$$

$$\therefore b = -1 - a \quad \text{㉠}$$

이 때, ㉠을 주어진 식에 대입하면

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 1}{x^2 + ax + b} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 1}{x^2 + ax - (1 + a)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 1}{(x - 1)(x + 1 + a)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x + 1 + a} = \frac{1}{a + 2} = \frac{1}{3}$$

$$\therefore a = 1$$

한편, ㉠에서 $b = -2 \therefore ab = -2$

5) 정답 ①

$$x^2 - y^2 + 2y + a = 0$$

$$x^2 - (y^2 - 2y + 1) = -1 - a > 0$$

$$\therefore a < -1$$

6) 정답 ⑤

$$f(x) = 2\sin^3 x + 2\sin x \cos^2 x + 2\cos x$$

$$= 2\sin^3 x + 2\sin x (1 - \sin^2 x) + 2\cos x$$

$$= 2\sin x + 2\cos x = 2\sqrt{2} \sin(x + \frac{\pi}{4}) \leq 2\sqrt{2}$$

7) 정답 ②

점 (a, b, c) 가 구 $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ 위에 있으므로

$$a^2 + b^2 + c^2 = 4$$

한편, 두 평면 $ax + by + cz = 1, ax + by + cz = 3$ 은

서로 평행하므로

이 두 평면 사이의 최단거리 d 는

평면 $ax + by + cz = 3$ 위의 한 점 $(\frac{3}{a}, \frac{3}{b}, \frac{3}{c})$ 로부터
평면 $ax + by + cz - 1 = 0$ 에 이르는 거리와 같다.
따라서

$$d = \frac{\left| a \cdot \frac{3}{a} + b \cdot \frac{3}{b} + c \cdot \frac{3}{c} - 1 \right|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \frac{2}{\sqrt{4}} = 1$$

8) 정답 ②

자료 A, B, C 는 각각

$A : 1, 2, 3, \dots, 50$

$B : 51, 52, 53, \dots, 100$

$C : 2, 4, 6, \dots, 100$ 이므로

자료 A, B, C 의 분포에 해당하는 확률변수를 각각 X, Y, Z 라 하면

$Y = X + 50, Z = 2X$ 의 관계가 성립한다.

따라서, X, Y, Z 의 표준편차 $\sigma(X), \sigma(Y), \sigma(Z)$ 를

각각 a, b, c 라 하면

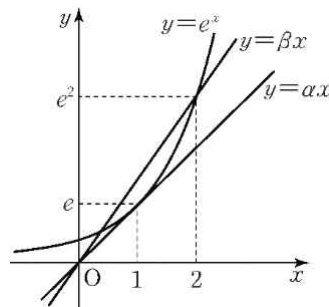
$$b = \sigma(Y) = \sigma(X + 50) = \sigma(X) = a$$

$$c = \sigma(Z) = \sigma(2X) = 2\sigma(X) = 2a$$

$$\therefore a = b < c$$

9) 정답 ⑤

$y = e^x$ 의 접선 중 원점을 지나는 것은 $y = ex$
즉, $(1, e)$ 에서의 접선과 같다.



$$\beta \geq \frac{e^2}{2}, \quad \alpha \leq e$$

따라서 $\beta - \alpha$ 의 최소값은 $\frac{e^2}{2} - e = e(\frac{e}{2} - 1)$

10) 정답 ④

영역 D 는 세 부등식 $x > 0, y \geq -x, y \leq 2x$ 를 만족시키는 점 (x, y) 들의 모임이고, 두 점 $P(a, b), Q(c, d)$ 는 D 에 속하므로

$$a > 0, c > 0$$

$$\therefore a + c > 0 \quad \text{㉠}$$

$$b \geq -a, d \geq -c$$

$$\therefore b + d \geq -(a + c) \quad \text{㉡}$$

$$\leq 2a, d \leq 2c$$

$$\therefore b+d \leq 2(a+c) \dots\dots$$

㉠, ㉡으로부터 $\frac{b+d}{a+c} \geq -1$ 이고,

㉠, ㉢으로부터 $\frac{b+d}{a+c} \leq 2$

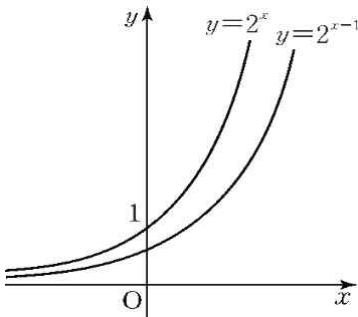
즉, $\frac{b+d}{a+c}$ 의 최대값, 최소값은 각각 2, -1이므로
구하는 최대값과 최소값의 차이는 3이다.

11) 정답 ③

① $y=2$ 의 x 축 대칭은 $-y=2^x \therefore y=-2^x$

또, $y=\frac{1}{2^x}=2^{-x}$ 즉, 옳지 않다.

② $y=2^x \rightarrow y=2^{x-1}$ (x 축 방향으로 1만큼 평행이동)
즉, 그 그래프는 아래와 같으므로 옳다.



③ $y=2 \cdot 2^x=2^2 \cdot 2^x=2^{2+\frac{1}{2}}$

즉, $y=2^x \rightarrow y=2^{x+\frac{1}{2}}$

(즉, x 축 방향으로 $-\frac{1}{2}$ 만큼 평행이동) $\therefore$ 옳다.

12) 정답 ①

$$\sqrt{17}-4=\frac{1}{8+a_1} \text{ 이므로}$$

$$a_1=\frac{1}{\sqrt{17}-4}-8=\frac{\sqrt{17}+4}{(\sqrt{17}-4)(\sqrt{17}+4)}-8$$

$$=\sqrt{17}-4 \text{ 이다.}$$

또한, 조건

$$\frac{1}{8+a_1}=\frac{1}{8+\frac{1}{8+a_2}}=\frac{1}{8+\frac{1}{8+\frac{1}{8+a_3}}}=\dots \text{로부터}$$

$$a_1=\frac{1}{8+a_2}, a_2=\frac{1}{8+a_3}, \dots$$

$$\therefore a_2=\frac{1}{a_1}-8, a_3=\frac{1}{a_2}-8, \dots$$

위 두 결과를 이용하여 $a_2, a_3, \dots$ 의 값을 차례로 구하면

$$a_2=\frac{1}{a_1}-8=\frac{1}{\sqrt{17}-4}-8=\sqrt{17}-4$$

$$a_3=\frac{1}{a_2}-8=\frac{1}{\sqrt{17}-4}-8=\sqrt{17}-4$$

...

$$\therefore a_{2002}=a_{2001}=\dots=a_3=a_2=\sqrt{17}-4$$

13) 정답 ⑤

먼저 $a \rightarrow \square$ 를 수행하면

$$Za=\begin{pmatrix} \sqrt{2} & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}=\frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

연산자 (가)에 의해 표현되는 행렬을 A 라 하면

$$Za \Rightarrow (\text{가}) \Rightarrow \square X \text{의 결과가 } \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{이므로}$$

$$XA Z a=\frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$Z a=Z a=\frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \text{이므로}$$

XA 는 x 에 대한 대칭행렬이다.

$$\therefore XA=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A=X^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}=XY$$

즉, $A=XY$ 에서 (가)의 연산은 $\square Y \Rightarrow \square X$ 이다.

14) 정답 ③

① 그림에서 서로 다른 2개의 직선을 그려서 나누어진
영역의 최소값은 3, 최대값은 4이므로

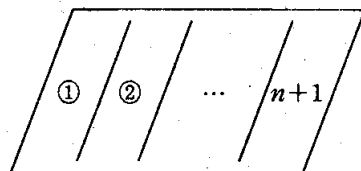
$$f(2)=3, g(2)=4 \therefore \text{참}$$



② 그림에서 서로 다른 n 개의 직선을 그어 나누어진
수가 최소가 되려면 n 개의 직선을 모두 평행하게
그어야 하므로 이 때 나누어진 직선의 수는 $n+1$ 개
이다. 즉 $f(n+1)=n+1 \therefore$ 참



③ 그림에서 $f(4)=5, g(3)=7$ 이므로 $g(3) > f(4)$
따라서 모든 n 에 대하여 $g(n) \leq f(n+1)$ 이 성립하
는 것은 아니다. $\therefore$ 거짓



15) 정답 ③

다항함수 $f(x)$ 가 $f(x) = 1, f_1(x) = x,$
 $f_{n+1}(x) = xf_n(x) + f_{n-1}(x)$ (n 은 자연수)
 을 만족하므로, $x = 0$ 을 대입하면
 $f_0(0) = 1, f_1(0) = 0$
 이 때, $n = 1$ 을 대입하면, $f_2(0) = 0 \cdot f_1(0) + f_0(0) = 1$
 같은 방법으로, $f_3(0) = 0 \cdot f_2(0) + f_1(0) = 0$
 $\vdots$

따라서 짝수 번째항은 1, 홀수 번째 항은 0,
 즉, $f_{2n-1}(0) = 0, f_{2n}(0) = 1$ 이다.
 또한, $f_0(x)$ 는 우함수이고, $f_1(x)$ 는 기함수이므로
 $f_2(x) = xf_1(x) + f_0(x)$ 는 우함수이다.
 (기함수 $\cdot$ 기함수 = 우함수, 우함수 + 우함수 = 우함수)
 같은 방법으로 $f_3(x) = xf_2(x) + f_1(x)$ 는 기함수이다.
 즉, 홀수 번째 항은 모두 기함수이고,
 짝수 번째항은 모두 우함수이다.
 따라서, $f_{2n-1}(x)$: 함수, $f_{2n}(x)$: 우함수
 한편, $f_2(x) = xf_1(x) + f_0(x)$ 에서
 $f_1(x)$ 이 1차이므로 $f_2(x)$ 의 차수는 2차이다.
 같은 방법으로 $f_3(x) = xf_2(x) + f_1(x)$ 에서
 $f_2(x)$ 이 2차이므로 $f_3(x)$ 의 차수는 3차이다.
 즉, $f_n(x)$ 은 n 차 다항식이다.
 이 때, $f_{2n-1}(x)$ 은 $2n-1$ 차 다항식이고, 기함수이므로,
 항 중에 짝수차 항이 없으므로,
 $0, 1, 2, 3, \dots, 2n-1$ 중 짝수를 뺀 $1, 3, 5, \dots, 2n-1$
 은 모두 n 개의 홀수이므로
 $f_{2n-1}(x)$ 은 n 개의 항을 갖는 다항식이다.
 하지만, $f_{2n}(x)$ 은 모두 $2n+1$ 개의 항 중에
 $0, 1, 2, 3, 4, \dots, 2n-1, 2n$
 짝수차수를 갖는 항은 $0, 2, 4, 6, \dots, 2n$ 으로
 0 부터이므로 모두 $n+1$ 개이다.

16) 정답 ⑤

$f(x) = x[x]$ 이므로
 ① $x \geq 0$ 일 때, $[x] \geq 0$ 이므로 $x[x] \geq 0$
 $\therefore f(x) = [x[x]] \geq 0$
 $x < 0$ 일 때, $[x] < 0$ 이므로 $x[x] > 0$
 $\therefore f(x) = [x[x]] \geq 0$
 $\therefore$ 옳다.
 ② $n \leq x < n+1$ 일 때, $[x] = n$
 또 $n^2 \leq x[x] < n^2 + n$
 $\therefore f(x) = [x[x]] = n^2$ 또는 $n^2 + 1$ 또는 $\dots$ 또는
 $n^2 + n - 1$
 즉, $n(\{f(x) \mid n \leq x < n+1\}) = n$

$\therefore$ 옳다.

③ $-n \leq x < -n+1$ (n 은 자연수일 때) $[x] = -n$
 또 $n^2 \geq x[x] > n^2 - n$
 $\therefore f(x) = [x[x]] = n^2 - n, n^2 - n + 1, \dots, n^2 - 1, n^2$
 즉, $n(\{f(x) \mid -n \leq x < -n+1\}) = n+1$
 $\therefore$ 옳다.
 따라서, ①, ②, ③ 모두 옳다.

17) 정답 ①

한 원에서 현에 대한 원주각의 크기는 동일하므로
 현 AB에 대해 $\angle ACB = \angle AEB = 60^\circ$
 현 AC에 대해 $\angle ABC = \angle AEC = 60^\circ$
 즉, $\angle BEP = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ \dots\dots$ (가)
 이 때 $BE = PE$ 이고 $\angle BEP = 60^\circ$ 이므로
 $\triangle BPE$ 는 정삼각형
 $\therefore \angle BPE = 60^\circ \dots\dots$ (나)
 즉, $\triangle CDE \sim \triangle CBP$
 따라서, $PE : BP = CE : CP \dots\dots$ (다)이다.

18) 정답 ①

$m^4 + 4^n = 4 \cdot (4j^4 + 4^{n-1})$ 이므로 소수가 아니다.
 $\dots\dots$ (가)
 또 $m^4 + 4^{2k-1} = (m^2)^2 + 4(4^{k-1})^2$
 $(m^2)^2 + 4(4^{k-1})^2 + 4 \cdot m^2 \cdot 4^{k-1} - 4 \cdot m^2 \cdot 4^{k-1}$
 $= (m^2 + 2 \cdot 4^{k-1})^2 - (2 \cdot m \cdot 2^{k-1})^2$
 $= (m^2 - m \cdot 2^k + 2 \cdot 4^{k-1})(m^2 + m \cdot 2^k + 2 \cdot 4^{k-1})$
 $\dots\dots$ (나)
 또 $m^2 - m \cdot 2^k + 2 \cdot 4^{k-1} = (m - 2^{k-1})^2 + 4^{k-1} = 1$
 이다. $\dots\dots$ (다)

19) 정답 ①

주어진 식 $f(g(x)) = \int_0^x f(t)g(t)dt - xe^x + 3$ 의 양변을
 x 에 대하여 미분하면
 $f'(g(x))g'(x) = f(x)g(x) - (1+x)e^x$
 이 때, 두 함수 $f(x) = ax+b, g(x) = e^x$ 을 대입하면
 $ae^x = (ax+b)e^x - (1+x)e^x = \{(a-1)x + (b-1)\} \cdot e^x$
 $\therefore a-1=0, a=b-1$
 즉, $a=1, b=2$
 따라서 $f(2) = 1 \cdot 2 + 2 = 4$ 이다.

20) 정답 ②

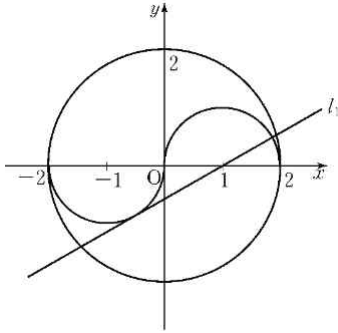
그림에서 l_1 은 직선 $y = a(x-1)$ 이 원 $(x+1)^2 + y^2 = 1$
 에 접하는 것이므로
 원의 중심 $(-1, 0)$ 에서 직선 $a(x-1) - y = 0$ 에 이르는

거리 는 $d = \frac{-2a}{a+1} = 1$ 이므로

$$|2a| = \sqrt{a^2 + 1} \quad 3a^2 = 1$$

$$\therefore a = \frac{3}{3} \quad (\because a > 0)$$

$$\therefore 0 < a < \frac{\sqrt{3}}{3}$$



21) 정답 ④

$$f(x) = x^2 - x - 6 = (x-3)(x+2)$$

$$g(x) = x^2 - ax + 4 \text{에서}$$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = (g(x)-3)(g(x)+2) \geq 0$$

$$\therefore \therefore g(x) \geq 3 \quad \text{는} \quad g(x) \leq -2$$

(i) $g(x) \geq 3$ 에서 $x^2 - ax + 4 \geq 3$

$$\text{즉 } x^2 - ax + 1 \geq 0$$

이것이 모든 x 에 대하여 성립하므로 $a^2 - 4 \leq 0$

$$\therefore -2 \leq a \leq 2$$

(ii) $g(x) \leq -2$ 에서 $x^2 - ax + 4 \leq -2$

$$\text{즉, } x^2 - ax + 6 \leq 0$$

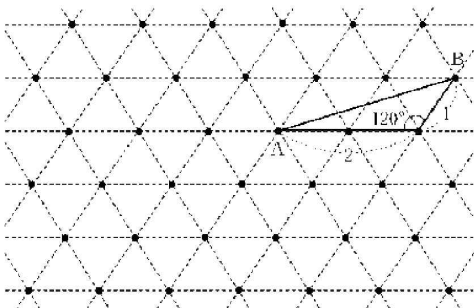
$h(x) = x^2 - ax + 6$ 은 아래로 볼록한 포물선이므로

모든 x 에 대하여 $h(x) \leq 0$ 일 수 없다.

(i), (ii)에서 구하는 a 의 값의 범위는 $-2 \leq a \leq 2$

22) 정답 ④

고정된 한 원자 와 중심 사이의 거리가 $\sqrt{7}$ 이 되려면 원자가 아래 그림의 B의 위치에 놓여야 한다.



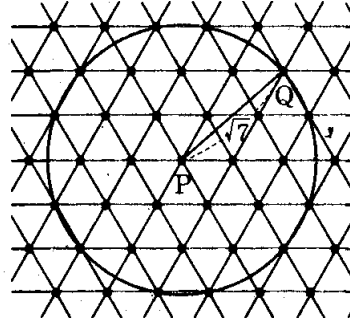
제이코사인법칙에 의해

$$AB^2 = 2^2 + 1^2 - 2 \times 2 \times 1 \times \cos 120^\circ = 7$$

$$\therefore AB = \sqrt{7}$$

따라서, A를 한 점으로 하고 두 변의 길이가 1, 2인 평행사변형을 찾아 A와 중심거리가 $\sqrt{7}$ 인 원자를 찾으면 된다.

따라서, 모두 12개이다.



23) 정답 ④

$$\triangle ABH \text{에서 } \overline{BH} = 500 \times \sin 37^\circ = 500 \times 0.6 = 300(\text{m})$$

$$\triangle BCG \text{에서 } \overline{BC} = a \text{라 하면 } \overline{BG} = a \sin 12^\circ = 0.2a$$

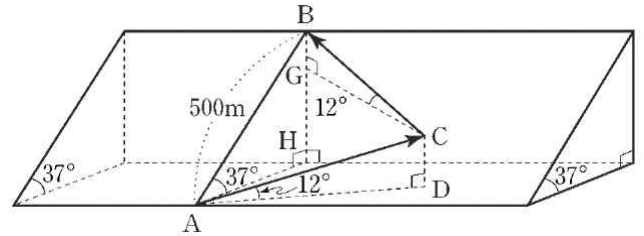
$$\triangle ACD \text{에서 } \overline{AC} = b \text{라 하면 } \overline{CD} = b \sin 12^\circ = 0.2b$$

$$\text{이 때, } \overline{GH} = \overline{CD} \text{ 이므로 } \overline{BH} = \overline{BG} + \overline{GH} = \overline{BG} + \overline{CD}$$

$$\therefore 300 = 0.2a + 0.2b \quad \text{즉, } a + b = 1500$$

따라서, 구하는 우회도로의 길이

$$\text{즉, } \overline{BC} + \overline{CA} = 1500(\text{m})$$



24) 정답 ③

어떤 도시의 전체 구매량을 p , 인구를 a ,

A 시로부터의 거리를 b 라고 하면

$$p = \frac{ak}{b^2} \quad (k \text{는 일정한 상수}) \dots \text{㉠}$$

㉠을 이용하여

$$\text{B 시의 전체구매량을 구하면 } \frac{500000k}{20^2}$$

$$\text{C 시의 전체구매량을 구하면 } \frac{kx}{10^2}$$

C 시의 전체구매량은 B의 전체구매량의 $\frac{1}{2}$ 이므로

$$\frac{kx}{10^2} = \frac{1}{2} \times \frac{500000k}{20^2}$$

$$\therefore x = 62500$$

25) 정답 2

행렬 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ 에 대하여,

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2 A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = A$$

즉, $A^{2n} = E$, $A^{2n-1} = A$ 이므로,

$$\sum_{n=1}^{2002} A^n = A + A^2 + A^3 + \dots + A^{2002}$$

$$= A + E + A + \dots + E$$

$$= 1001A + 1001E$$

$$= 1001 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + 1001 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1001 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

따라서,

$$\sum_{n=1}^{2002} A^n = \frac{1}{2002} \cdot 1001 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

따라서, $a + b + c + d = 2$ 이다.

26) 정답 17

$$(i) |x| < 1 \text{ 일 때, } f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{2n+4} + 2x}{x^{2n} + 1} = 2x$$

(ii) $|x| > 1$ 일 때,

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^4 + \frac{2}{x^{2n-1}}}{1 + \frac{1}{x^{2n}}} = \frac{x^4 + 0}{1 + 0} = x^4$$

$$\text{따라서, } f\left(\frac{1}{2}\right) + f(2) = 1 + 16 = 17$$

27) 정답 24

$\{2, 3\} \cap A \neq \emptyset$ 이므로

집합 A 는 2, 3 중 적어도 하나는 원소로 가져야 한다.

이 때, 2, 3을 원소로 갖지 않는 집합 U 의 부분집합의

개수는 $2^{5-2} = 2^3 = 8$ (개)이다.

따라서, 구하는 집합 A 의 개수는

$$2^5 - 8 = 32 - 8 = 24 \text{ (개)}$$

28) 정답 16

$$(\log_2 x)^3 + 3\log_2 x = 4(\log_2 x)^2 + \log_2 x$$

$$\log_2 x = t \text{로 치환하면 } t^3 + 3t = 4t^2 + t$$

$$t^3 - 4t^2 + 2t = 0, \quad t(t^2 - 4t + 2) = 0$$

$$\therefore t = 0, \quad t^2 - 4t + 2 = 0$$

(i) $t = 0$ 일 경우

$$\log_2 x = 0 \quad \therefore x = 1$$

(ii) $t^2 - 4t + 2 = 0$ 일 경우

$$(\log_2 x)^2 - 4\log_2 x + 2 = 0$$

위 식을 만족하는 x 의 값을 α, β 라 하면

$$\log_2 \alpha + \log_2 \beta = 4 \quad \log_2 \alpha \beta = 4$$

$$\therefore \alpha \beta = 2^4 = 16$$

(i), (ii)에서 구하는 해의 곱은 $1 \times 16 = 16$

29) 정답 13

모아야 할 20종류의 스티커의 집합을 U 라 하고,

갑, 을, 병이 모은 스티커의 종류의 집합을

A, B, C 라 하면

$$n(U) = 20, \quad n(A) = 4, \quad n(B) = 5, \quad n(C) = 5$$

$$n(A \cap B) = n(B \cap C) = n(C \cap A) = 3$$

$$n(A \cap B \cap C) = 2$$

$$\therefore n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C)$$

$$- n(A \cap B) - n(B \cap C) - n(C \cap A)$$

$$+ n(A \cap B \cap C)$$

$$= 4 + 5 + 5 - 3 - 3 - 3 + 2 = 7$$

따라서, 더 모아야 할 스티커의 수는 $20 - 7 = 13$ (개)

30) 정답 26.25

한 달 후의 가격이 550원일 확률은 0.5이다.

계속해서 다음달에 605원이 될 확률이 0.5이므로,

결국 현재 500원인 상품이 두 달 후에 605원이 될

확률은 $0.5 \times 0.5 = 0.25$ 이다.

나머지 가격도 같은 방법으로 계산하면,

두 달 후의 가격에 대한 확률은 다음 표와 같다.

가격	605	495	405
확률	0.25	0.5	0.25

따라서, 두 달 후 받을 수 있는 금액의 기댓값은

$$0 \times 0.25 + 5 \times 0.5 + 95 \times 0.25 = 26.25$$