

2001 대학수학능력시험문제 수리탐구영역 (I)

자연계

1	⑤	6	②	11	④	16	③	21	②	26	11
2	②	7	③	12	①	17	④	22	③	27	12
3	①	8	⑤	13	④	18	⑤	23	④	28	22
4	①	9	③	14	①	19	④	24	②	29	47
5	④	10	②	15	⑤	20	①	25	5	30	1.25

1. $(\sqrt{2})^5 = (\sqrt{2})^4 \sqrt{2} = 4\sqrt{2}$

답 ⑤

2. 근과 계수와의 관계에서 $\alpha + \beta = -7$, $\alpha\beta = 1$

$$\begin{aligned} \therefore (\alpha^2 + \beta^2) + 7(\alpha + \beta) &= (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta + 7(\alpha + \beta) \\ &= (-7)^2 - 2 \cdot 1 + 7 \cdot (-7) \\ &= 49 - 2 - 49 = -2 \end{aligned}$$

답 ②

3. $\sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\tan \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$ 에서

$$\begin{aligned} (\text{주어진 식}) &= (2 + 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2})(2 - \sqrt{3}) \\ &= (2 + \sqrt{3})(2 - \sqrt{3}) \\ &= 2^2 - (\sqrt{3})^2 = 4 - 3 = 1 \end{aligned}$$

답 ①

4. $f(x) = (x^2 + 1)e^x$ 를 x 에 대해 미분하면

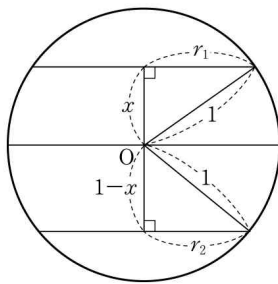
$$\begin{aligned} f'(x) &= (x^2 + 1)'e^x + (x^2 + 1)(e^x)' = 2xe^x + (x^2 + 1)e^x \\ &= x^2 e^x + 2xe^x + e^x \end{aligned}$$

$\therefore f'(0) = e^0 = 1$

답 ①

5. 주어진 그림에서 위, 아래의 단면은 원이다.

즉, 반지름의 길이를 각각 r_1 , r_2 로 놓고 오른쪽의 그림을 얻을 수 있다. 구의 중심에서 위의 단면까지의 거리를 x 로 놓으면



$$r_1^2 = 1 - x^2, \quad r_2^2 = 1 - (1-x)^2 = -x^2 + 2x$$

따라서, 두 단면의 넓이의 합은

$$\begin{aligned} \pi r_1^2 + \pi r_2^2 &= \pi(1 - x^2 - x^2 + 2x) = \pi(-2x^2 + 2x + 1) \\ &= \pi \left\{ -2 \left(x - \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{3}{2} \right\} \end{aligned}$$

따라서 $x = \frac{1}{2}$ 일 때, 넓이의 합은 최대값 $\frac{3}{2} \pi$ 를 갖는다. 답 ④

6. $\frac{x^2}{2} - y^2 = 1$ 위의 점 (2, 1)에서의 접선의 방정식은

$$\frac{2x}{2} - 1 \cdot y = 1$$

$$x - y = 1 \quad \therefore y = x - 1$$

따라서, 구하는 이 접선의 y 절편의 값은 -1이다.

답 ②

7. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ 에서

$$A^{-1} = \frac{1}{1-0} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \therefore A^{-1} + AB &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

답 ③

8. $\frac{z_1}{z_2}$ 이 순허수이면 $\frac{z_1}{z_2} = ai$ ($a \neq 0$)

즉, $z_1 = z_2 ai$ 에서 $|z_1| = |z_2||a|$

$$\arg(z_1) = \arg(z_2) + \arg(ai)$$

$$= \arg(z_2) \pm \frac{\pi}{2}$$

따라서, 곡선 위에 존재하는 두 복소수 z_1, z_2 는 서로 수직인 두 직선 위에 각각 놓여 있어야 한다.

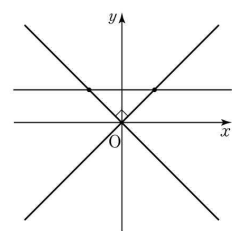
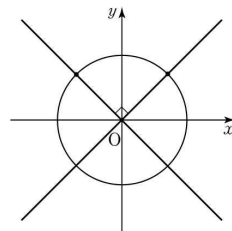
이 때, 아래 그림을 보면 $\frac{z_1}{z_2}$ 이 순허수가 될 수 없는 경우는

⑤이다.

답 ⑤

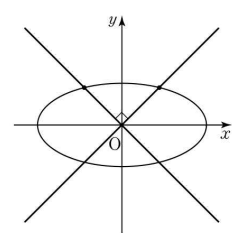
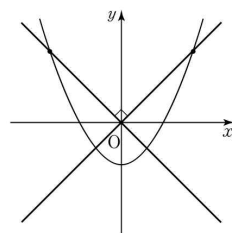
①

②

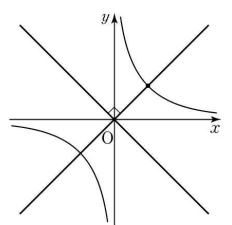


③

④



⑤



9. 일차변환 $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 60^\circ & -\sin 60^\circ \\ \sin 60^\circ & \cos 60^\circ \end{pmatrix}$ 이다.

즉, 원점을 중심으로 한 60° 회전변환과 같다.

여기서, A, B가 옮겨진 점을 A', B'이라 하면,

$$S(\triangle OAB) = S(\triangle OA'B') \text{이고, } \triangle OAB \text{는 한변의 길이가 2인}$$

$$\text{정삼각형이므로, 구하는 넓이는 } \frac{1}{2} \times 2^2 \times \sin 60^\circ = 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$$

답 ③

10. 확률밀도함수의 정의에 따라 $\int_0^1 f(x) dx = 1$, $\int_0^1 (ax + a) dx = 1$

2001 대학수학능력시험문제 수리탐구영역 (I)

자연계

$$\left[\frac{a}{2}x^2 + ax \right]_0^1 = \frac{3}{2}a = 1$$

$$\therefore a = \frac{2}{3}$$

답 ②

11. $f(a) = f'(a) = 0$ 이고 $f(x)$ 는 삼차함수이므로
 $f(x) = (x-a)^2(Px+Q)$ 꼴로 나타낼 수 있다. 또한 $f(b) = 0$
 이므로 $Pb+Q=0 \quad \therefore Q=-Pb \quad \dots\dots \textcircled{㉑}$

한편 $f'(c) = 0$ 이므로 $2(c-a)(Pc+Q) + (c-a)^2P = 0$
 $2(Pc+Q) + (c-a)P = 0 \quad \dots\dots \textcircled{㉒}$

㉑을 ㉒에 대입하고 정리하면 $P(3c-2b-a) = 0$

$$\therefore c = \frac{a+2b}{3}$$

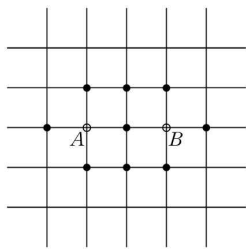
답 ④

12. 두 차량이 움직인 거리를 각각 x, y
 라 하면 $x+y=4$ (단, x, y 는 양의 정
 수)

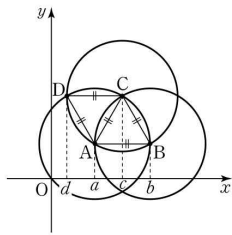
$$\therefore x=1, y=3 \text{ 또는 } x=2, y=2 \text{ 또는 } x=3, y=1$$

각각의 경우에 해당하는 점 P 의 위치를
 모두 모아서 그림으로 나타내면 위와 같다.

답 ①



13. 오른쪽 그림에서 알 수 있듯이 점 A, B,
 C, D에 대하여, 각각의 x좌표 a, b, c, d의
 크기는 $\therefore d < a < c < b$ 답 ④



14. 점 $P(x, y)$, $A(-1, -1)$, $R(0, y)$, $Q(x, 0)$
 에 대하여 $\overline{PA} = \overline{PQ} + \overline{PR}$ 에서

$$\sqrt{(x+1)^2 + (y+1)^2} = y + x \text{이다.}$$

이 때, 양변을 제곱하면, $(x+1)^2 + (y+1)^2 = (x+y)^2$

$$x^2 + 2x + 1 + y^2 + 2y + 1 = x^2 + 2xy + y^2$$

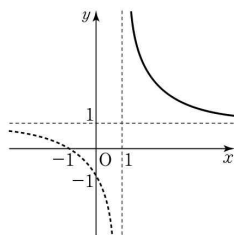
$$2x + 2y + 2 = 2xy$$

$$x + y + 1 = xy$$

$$\therefore y = \frac{x+1}{x-1} = 1 + \frac{2}{x-1}$$

따라서, 그래프는 오른쪽과 같다.

하지만, 점 $P(x, y)$ 가 1사분면 위의 점이므로,
 실선만이 구하는 자취이다. 답 ①



15. ㄱ. $3^2 = 9 = 1 \times 5 + 4 = 14_{(5)}$ 이므로 $f(3) = 4$ 이다.

ㄴ. 모든 자연수 n 에 대하여, n^2 을 오진법으로 나타냈을 때, 일의
 자리수는 0, 1, 2, 3, 4 중에 하나이다.

ㄷ. $1^2 = 1 = 1_{(5)}$, $\rightarrow f(1) = 1$

$2^2 = 4 = 4_{(5)}$ $\rightarrow f(2) = 4$

$3^2 = 9 = 1 \times 5 + 4 = 14_{(5)}$ $\rightarrow f(3) = 4$

$4^2 = 16 = 3 \times 5 + 1 = 31_{(5)}$ $\rightarrow f(4) = 1$

$5^2 = 25 = 1 \times 5^2 + 0 \times 5 + 0 = 100_{(5)}$ $\rightarrow f(5) = 0$

$6^2 = 36 = 1 \times 5^2 + 2 \times 5 + 1 = 121_{(5)}$ $\rightarrow f(6) = 1$

$7^2 = 49 = 1 \times 5^2 + 4 \times 5 + 4 = 144_{(5)}$ $\rightarrow f(7) = 4$

:

으로 자연수 n 의 제곱 n^2 에 대하여, $f(n)$ 은 1, 4, 4, 1, 0이 계속
 반복됨을 알 수 있다.

따라서 $f(n) = 2$ 인 자연수는 n 은 없다.

답 ⑤

16. 집합 $A=\{2, 3, 4\}$, $B=\{1, 2, 5\}$, $C=\{2, 4, 5\}$ 에 대하여, $A \cup$
 $B=\{1, 2, 3, 4, 5\}$, $A \cap B=\{2\}$

$B \cup C=\{1, 2, 4, 5\}$, $B \cap C=\{2, 5\}$

$A \cup C=\{2, 3, 4, 5\}$, $A \cap C=\{2, 4\}$ 이고,

$(A \cup B) - (A \cap B)=\{1, 3, 4, 5\}$ 에서 $B \Rightarrow A$

$(B \cup C) - (B \cap C)=\{1, 4\}$ 에서 $B \Rightarrow C$

$(A \cup C) - (A \cap C)=\{3, 5\}$ 에서 $A \Rightarrow C$ 이다. $\therefore B \Rightarrow A \Rightarrow C$

답 ③

17. 지수와 로그의 정의에서 $r = \log_a x \Leftrightarrow x = a^r$,

$$s = \log_a y \Leftrightarrow y = a^s$$

이 때, 지수법칙으로부터 $a^{r+s} = a^r a^s = xy$

$$\therefore r + s = \log_a xy$$

$$\text{즉, } \log_a x + \log_a y = \log_a xy$$

답 ④

18. 삼각형의 성질에서 내각의 크기의 순서는 그에 대응되는 변의
 길이의 순서와 같다.

이 때, $\triangle ADE$ 에서 $\angle A$ 의 대변은 $\overline{DE}$, $\angle D$ 의 대변은 $\overline{AE}$,

$\angle E$ 의 대변은 $\overline{AD}$ 이므로 $\angle A < \angle ADE < \angle AED \Leftrightarrow$

$\overline{DE} < \overline{AE} < \overline{AD}$ 이다.

답 ⑤

19. 오른쪽 그림과 같이 점 D에서 $\overline{AB}$
 에 내린 수선의 발을 E라 하자

$\overline{OA} = \overline{OB} = 2a$ 로 놓으면

$$\overline{AE} = \overline{ED} = \overline{EO} = a$$

$$\text{즉, } \overline{BD} = \sqrt{\overline{BE}^2 + \overline{ED}^2}$$

$$= \sqrt{(3a)^2 + a^2} = \sqrt{10}a$$

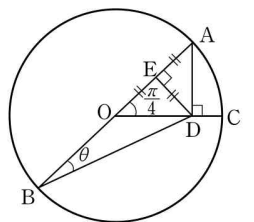
따라서, 직각삼각형 BDE로부터

$$\sin \theta = \frac{\overline{DE}}{\overline{BD}} = \frac{a}{\sqrt{10}a} = \frac{1}{\sqrt{10}}$$

$$\cos \theta = \frac{\overline{BE}}{\overline{BD}} = \frac{3a}{\sqrt{10}a} = \frac{3}{\sqrt{10}}$$

$$\therefore \sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta = 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{10}} \times \frac{3}{\sqrt{10}} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$$

답 ④



20. 삼차함수 $y = x^3 + ax$ 의 그래프가 원점을 중심으로 45° 이동하
 여 실수 전체에서 정의된 어떤 함수가 되려면, 아래의 그림 1 과 같
 이 $y = x$ 그래프의 위아래로 교차하면 안된다.

즉 그림 2와 같이 $y = x$ 의 그래프가 $x = 0$ 에서 주어진 삼차함수
 $y = x^3 + ax$ 의 접선하거나, $x = 0$ 을 기준으로 양의 방향으로 주
 어진 삼차 함수의 그래프가 위에 있고, 음의 방향으로 주어진 삼
 차함수의 그래프가 아래에 있으면 된다.

따라서, $f'(x) = 3x^2 + a$ 에서 $f'(0) = a \geq 1$ 이다.

2001 대학수학능력시험문제 수리탐구영역 (I)

자연계

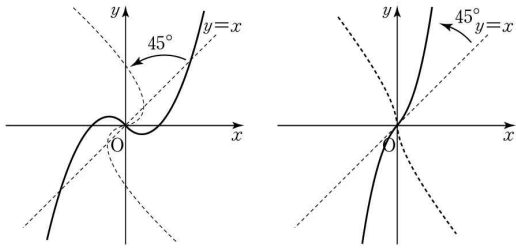
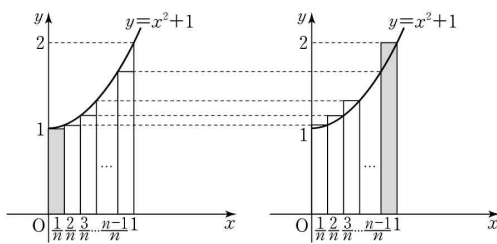


그림 1

그림 2

답 ①

21. 다음 그림에서 알 수 있듯이 A - B는 그림 (가)의 가장 큰 직사각형의 넓이와 그림 (나)의 가장 작은 직사각형의 넓이의 차와 같다.



$$\text{따라서 } A - B = \frac{1}{n} \cdot f(1) - \frac{1}{n} \cdot f(0) = \frac{2}{n} - \frac{1}{n} = \frac{1}{n} \leq 0.15$$

$$\therefore n \geq 6.6666\dots$$

즉, 구하는 n의 최소값은 7이다.

답 ②

$$22. \square\square\square\square\square \quad (2)$$

$$\wedge 10101 \quad (2)$$

11001 (2) 이 식이 성립하려면,

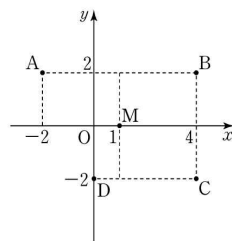
$\square\square\square\square\square$ (2)은 01100 (2)이다.

$$\text{이 때, } 1100_{(2)} = 1 \times 2^3 + 1 \times 2^2 = 12$$

따라서, 01100 (2)는 12번째이므로 구하는 알파벳은 L이다. 답 ③

23. 오른쪽 그림과 같이 네 점 (-2, 2), (4, 2), (4, -2), (1, -2)을 차례로 A, B, C, D라 하고 선분 AB, 선분 BC의 수직이등 분선의 교점 (1, 0)를 M이라 하자.

로봇팔이 고정된 점 P가 M일 때



$$\overline{PA} = \overline{PB} = \overline{PC} = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}, \overline{PD} = 2 \text{ 이므로 로봇팔의}$$

길이는 $\sqrt{13}$ 이면 된다.

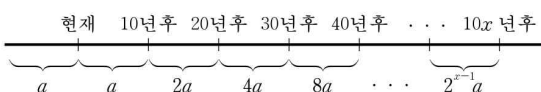
한편 점 P가 어느 위치에 있든

$$\overline{PA} + \overline{PC} \geq \overline{AC} = \sqrt{6^2 + 4^2} = 2\sqrt{13} \text{ 이므로 } \overline{PA} \geq \sqrt{13} \text{ 또는}$$

$$\overline{PC} \geq \sqrt{13} \text{ 이다. 즉, 로봇팔의 길이는 } \sqrt{13} \text{ 이상이 되어야 한다.}$$

따라서, 로봇팔의 길이를 최소로 할 수 있는 점 P의 위치는 점 M(1, 0)이다. 답 ④

24. 석유 소비량의 변화를 그림으로 나타내면



따라서 10년이 x회만큼 지난 후에 현재의 석유 매장량 b가 모두 소모된다고 하면 $a + 2a + 4a + 8a + \dots + 2^{x-1}a = b$

$$\frac{2^x - 1}{2 - 1} a = b$$

$$2^x = \frac{b}{a} + 1 \quad \therefore x = \log_2 \left(\frac{b}{a} + 1 \right)$$

그러므로 앞으로 석유를 사용할 수 있는 기간은

$$10 \log_2 \left(\frac{b}{a} + 1 \right) \text{ (년)}$$

답 ②

25. 역함수의 성질에서 $f(a) = b \Leftrightarrow f^{-1}(b) = a$

즉 $f^{-1}(5) = 2$ 이면, $f(2) = 5$ 이다.

따라서, $f(x) = ax^3 + b$ 에서

$$f(2) = 8a + b = 5$$

답 5

26. $f(x)$ 를 $(x-1)(x-2)$ 로 나눈 몫을 $Q(x)$ 라 하면 나머지가 $4x+3$ 이므로 $f(x) = (x-1)(x-2)Q(x) + 4x+3$

$$\therefore f(2x) = (2x-1)(2x-2)Q(2x) + 8x+3$$

$$= (x-1)\{2(2x-1)Q(2x) + 8\} + 11$$

즉, $f(2x)$ 를 $x-1$ 로 나눈 나머지는 11이다.

답 11

27. 두 벡터는 수직이므로 내적은 0이다. 따라서,

$$\vec{a} = (9, x+1, -12), \vec{b} = (-8, x, 7) \text{로부터}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 9 \times (-8) + (x+1) \times x + (-12) \times 7 = -72 + x^2 + x - 84 = 0$$

$$x^2 + x - 156 = 0$$

$$(x+13)(x-12) = 0$$

$$\therefore x = 12 \quad (\because x > 0)$$

답 12

28. a, b, c 에서 중복을 허락하여 3개를 뽑아 나열하는 방법의

$$\text{수는 } 3^3 = 27$$

여기서 a 가 연속하여 있는 경우를 생각한다.

(i) a 가 2개 연속할 때.

$$aab, aac, baa, caa \quad \text{즉, 4개}$$

(ii) a 가 3개 연속인 경우,

$$aaa \quad \text{즉, 1개}$$

따라서, 수신 가능한 단어의 수는 $27 - (4 + 1) = 22$ (개) 답 22

$$29. \sum_{k=1}^9 f(k+1) = \sum_{k=2}^{10} f(k)$$

$$\sum_{k=2}^{10} f(k-1) = \sum_{k=1}^9 f(k)$$

$$\text{따라서, } \sum_{k=1}^9 f(k+1) = f(2) + f(3) + \dots + f(10)$$

$$\sum_{k=2}^{10} f(k-1) = f(1) + f(2) + \dots + f(9)$$

$$\therefore \sum_{k=1}^9 f(k+1) - \sum_{k=2}^{10} f(k-1) = f(10) - f(1)$$

$$= 50 - 3 = 47$$

답 47

$$30. \int_0^1 (x+1)(x^2-x+1)dx = \int_0^1 (x^3+1)dx$$

2001 대학수학능력시험문제 수리탐구영역 (I)

자연계

$$= \left[\frac{x^4}{4} + x \right]_0^1 = \frac{1}{4} + 1 = \frac{5}{4} = 1.25$$

답 1.25