수학연구소
/數/理/院/

수능기출

년도	1999 11월 17일
대상	고3 자연계

1. $\log \frac{1}{4}$ 의 값은?

[2점][2000학년도 수능]

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ 0

④ $-\frac{1}{2}$ ⑤ $-\frac{1}{4}$

2. 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$에 대하여 $|\vec{a}|=2$, $|\vec{b}|=3$, $|\vec{a}-2\vec{b}|=6$ 일 때, 내적 $\vec{a}\cdot\vec{b}$의 값은?

[2점][2000학년도 수능]

① 5 ② 4 ③ 3

④ 2 ⑤ 1

3. $4\cos^2 x+4\sin x=5$일 때, $\sin x$의 값은?

[2점][2000학년도 수능]

① $\frac{1}{\sqrt{2}}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ 1

④ $\frac{1}{2}$ ⑤ $-\frac{1}{\sqrt{2}}$

4. 정적분 $\int_e^{e} \frac{3(\ln x)^2}{x}\,dx$의 값은?

[2점][2000학년도 수능]

① 3 ② 4 ③ 5

④ 6 ⑤ 7

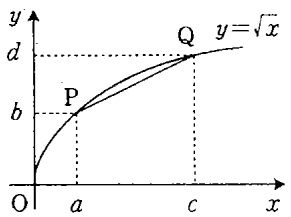
5. 복소수 z가 $z+\bar{z}=2$, $\arg(z)=\frac{\pi}{3}$를 만족시킬 때, z^3의 값은? (단, $\bar{z}$는 z의 켤레복소수이며, $\arg(z)$는 z의 편각이다.)

[2점][2000학년도 수능]

① $8+3\sqrt{3}i$ ② $-8-3\sqrt{3}i$ ③ $8i$

④ -2 ⑤ -8

6. 함수 $y=\sqrt{x}$의 그래프 위의 두 점 $P(a, b)$, $Q(c, d)$에 대하여 $\frac{b+d}{2}=1$일 때, 직선 PQ의 기울기는? (단, $0 < a < c$)



[3점][2000학년도 수능]

① $\frac{1}{5}$ ② $\frac{1}{4}$ ③ $\frac{1}{3}$

④ $\frac{1}{2}$ ⑤ 1

7. 시간 에 따라 감소하는 함수 $f(t)$에 대하여 $f(t+c)=\frac{1}{2}f(t)$를 만족시키는 양의 상수 c를 $f(t)$의 반감기라 한다. 함수 $f(t)=3^{t}$의 반감기는? [3점][2000학년도 수능]

① $\frac{1}{3}\log_3 2$ ② $\frac{1}{2}\log_3 2$ ③ $\log_3 2$
④ $2\log_3 2$ ⑤ $3\log_3 2$

8. 고대 인도의 수학자 바스카라는 다음과 같은 식을 사용하였다.

$$a+\quad b=\quad a+\frac{\square}{2}+\sqrt{a-\frac{\sqrt{\square}}{2}}$$

$\square$ 안에 알맞은 것은? (단, $a \geq b \geq 1$) [2점][2000학년도 수능]

① b ② a^2-b ③ a^2+b
④ $a+b$ ⑤ $a-b$

9. 전체집합 $=\{1, 2, 3, \cdots, 100\}$의 부분집합 A에 대하여 $f(A)$를 A에 속하는 모든 원소의 합이라고 하자. U의 두 부분집합 A, B에 대하여, <보기> 중 항상 옳은 것을 모두 고른 것은? (단, $f(\phi)=0$) [3점][2000학년도 수능]

[보 기]

ㄱ. $f(A^c)=f(U)-f(A)$
ㄴ. $A \subset B$이면, $f(A) \leq f(B)$이다.
ㄷ. $f(A \cup B)=f(A)+f(B)$

① ㄴ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

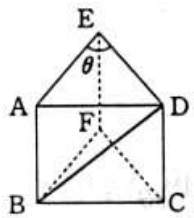
10. 1이 두 번만 나타나는 이진법의 수를 작은 수부터 차례로 배열하여 얻은 수열 $11_{(2)}$, $101_{(2)}$, $110_{(2)}$, $1001_{(2)}$, $1010_{(2)}$, $1100_{(2)}$, …의 제 56항과 같은 수는? [3점][2000학년도 수능]

① 2^9+1 ② $2^{10}+2^9$ ③ $2^{11}+1$
④ $2^{11}+2^{10}$ ⑤ $2^{13}+1$

11. 곡선 $x^3-xy^2=10$ 위의 점 $(-2, 3)$에서의 접선의 기울기는? [3점][2000학년도 수능]

① $-\frac{1}{4}$ ② $-\frac{1}{6}$ ③ 0
④ $\frac{1}{6}$ ⑤ $\frac{1}{4}$

12. 오른쪽 삼각기둥에서 두 정사각형 ABFE와 CDEF의 한 변의 길이는 1이다.
$\angle AED=\theta$일 때, 선분 BD의 길이를 θ의 함수로 나타낸 것은? [3점][2000학년도 수능]



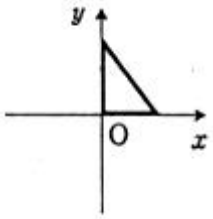
① $\sqrt{3-2\cos\theta}$ ② $\sqrt{3+2\cos\theta}$ ③ $\sqrt{3}$
④ $\sqrt{3-2\sin\theta}$ ⑤ $\sqrt{3+2\sin\theta}$

13. 주사위를 한 번 던져 나오는 눈의 수를 로 나눈 나머지를 확률변수 라 하자. X의 평균은?
(단, 주사위의 각 눈이 나올 확률은 모두 같다.)

[3점][2000학년도 수능]

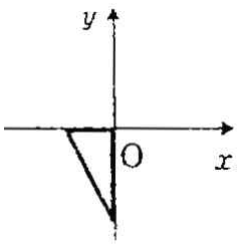
① 2 ② $\frac{5}{3}$ ③ $\frac{3}{2}$
④ $\frac{4}{3}$ ⑤ 1

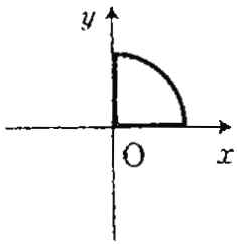
14. 오른쪽 그림과 같은 직각삼각형이 일차변환에 의해 옮겨질 수 있는 도형을 <보기> 중에서 모두 고른 것은?

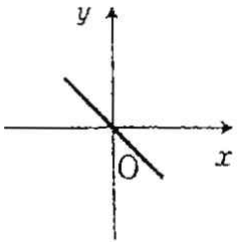


[2점][2000학년도 수능]

[보 기]

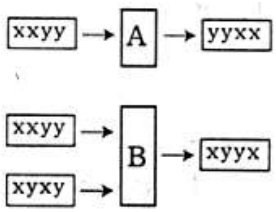
ㄱ.


ㄴ.


ㄷ.


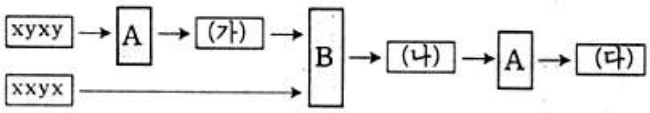
① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄴ, ㄷ

15. 두 개의 논리상자 A와 B가 있다.



논리상자 A는 문자 x와 y로 이루어진 네 자리 문자열을 x는 y로, y는 x로 바꾼다.
논리 상자 B는 두 개의 네 자리 문자열을 각 자리의 문자가 서로 같으면 x, 서로 다르면 y인 하나의 네 자리 문자열로 바꾼다. 다음과 같은 논리 회로에 두 문자열 $xyxy$, $xxyx$를 입력하였을 때, 출력 (다)에 들어갈 문자열은?

[3점][2000학년도 수능]



① $xxxx$ ② $xxxy$ ③ $xxyy$
④ $xyyy$ ⑤ $yyyy$

16. 음이 아닌 정수 n에 대하여 n을 5로 나눈 나머지를 $f(n)$, 10으로 나눈 나머지를 $g(n)$이라 하자. <보기> 중 항상 옳은 것을 모두 고른 것은?

[3점][2000학년도 수능]

[보 기]

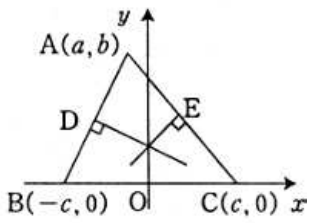
ㄱ. $f(f(n))=f(n)$
ㄴ. $g(f(n))=g(n)$
ㄷ. $f(g(n))=f(n)$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄴ, ㄷ

17. 다음은 △ABC의 세 변의 수직이등분선이 한 점에서 만남을 증명한 것이다.

[증 명]

직선 BC를 축, 변 BC의 수직이등분선을 y축으로 잡고, $A(a, b)$, $B(-c, 0)$, $C(c, 0)$라고 하자, (단, $b \neq 0$, $c \neq 0$)



(i) $a \neq c$이고 $a \neq -c$일 때

직선 AC의 기울기는 $\dfrac{b}{a-c}$ 이므로,

변 AC의 중점 E를 지나고 변 AC에 수직인 직선의 방정식은

$y = \boxed{(가)}\left(x - \dfrac{a+c}{2}\right) + \dfrac{b}{2}$

$= \boxed{(가)}x + \boxed{(나)}$ …… ①

같은 방법으로, 변 AB의 중점 D를 지나고 변 AB에 수직인 직선의 방정식은

$y = -\dfrac{a+c}{b}x + \boxed{(나)}$ …… ②

두 직선 ①, ②의 y절편이 같으므로 세 변의 수직이등분선은 y축 위의 점 $(0, \boxed{(나)})$에서 만난다.

따라서, △ABCC의 세 변의 수직 이등분선은 한 점에서 만난다.

(ii) $a = c$ 또는 $a = -c$일 때

△ABC는 $\boxed{(다)}$이므로,

세 변의 수직 이등분선은 D 또는 E에서 만난다.

따라서 △ABC의 세 변의 수직 이등분선은 한 점에서 만난다.

위의 증명에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것을 순서대로 적으면?

[3점][2000학년도 수능]

① $-\dfrac{a-c}{b}$, $\dfrac{a+b^2-c^2}{2b}$, 직각삼각형

② $-\dfrac{a-c}{b}$, $\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2b}$, 정삼각형

③ $-\dfrac{a-c}{b}$, $\dfrac{-a^2+b^2-c^2}{2b}$, 이등변삼각형

④ $\dfrac{a-c}{b}$, $\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2b}$, 이등변삼각형

⑤ $\dfrac{a-c}{b}$, $\dfrac{-a^2+b^2-c^2}{2b}$, 직각삼각형

18. 다음은 $4k+3$꼴의 소수가 무수히 많음을 증명한 것이다. (단, k는 음이 아닌 정수이다.)

[증 명]

$4k+3$꼴의 소수가 유한개 있다고 가정하고, 이것을 3, 7, 11, 19, …, p라 하자.

$n = 4 \cdot (7 \cdot 11 \cdot 19 \cdot \cdots \cdot p) + 34$이라 하면,

n은 3, 7, 11, 19, …, p로 $\boxed{(가)}$,

n의 모든 소인수는 $4k+1$ 또는 $4k+3$ 꼴의 정수이고,

$4k+1$꼴의 두 정수를 곱하면 $\boxed{(나)}$꼴의 정수이다.

그러므로, n의 모든 소인수가 $\boxed{(나)}$꼴이면,

n도 $\boxed{(나)}$꼴이다.

이것은 모순이므로, n은 $\boxed{(다)}$꼴의 소인수 q를 갖는다.

n은 q로 나누어 떨어지므로,

q는 3, 7, 11, 19, …, p가 아닌 $4k+3$꼴의 소수가 존재한다. 이것은 가정에 모순이다.

따라서, $4k+3$꼴의 소수는 무수히 많다.

위의 증명에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것을 순서대로 적으면?

[2점][2000학년도 수능]

① 나누어 떨어진다. $4k+1$, $4k+1$

② 나누어 떨어진다. $4k+3$, $4k+3$

③ 나누어 떨어지지 않는다. $4k+3$, $4k+1$

④ 나누어 떨어지지 않는다. $4k+1$, $4k+1$

⑤ 나누어 떨어지지 않는다. $4k+1$, $4k+3$

19. $\leq \theta \leq 2\pi$일 때, $\dfrac{1}{3+4\sin\theta}+\dfrac{1}{3+4\cos^2\theta}$의 최소값은?

[3점][2000학년도 수능]

① $\dfrac{1}{2}$ ② $\dfrac{2}{5}$ ③ $\dfrac{3}{10}$
④ $\dfrac{1}{5}$ ⑤ $\dfrac{1}{10}$

20. 이차곡선 $x^2-4x+9y^2-5=0$과 중심이 $(2, 0)$이고 반지름의 길이가 a인 원이 서로 다른 네 점에서 만날 때, a의 범위는?

[3점][2000학년도 수능]

① $0 \quad a \leq 2$ ② $1<a<3$ ③ $2 \leq a<4$
④ $0<a<4$ ⑤ $a \geq 2$

21. 연립부등식

$$\begin{cases} 7-x \geq 3|x-3| \\ \dfrac{1}{x-1}+\dfrac{1}{x-3} \geq 0 \end{cases}$$

를 만족시키는 x의 범위는?

[3점][2000학년도 수능]

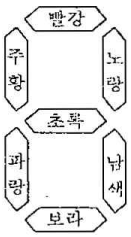
① $x<1,\ 3<x \leq 4$ ② $x<1,\ x \geq 4$
③ $1<x \leq 2,\ x \geq 4$ ④ $1<x<3,\ 3<x \leq 4$
⑤ $1<x \leq 2,\ 3<x \leq 4$

22. 어떤 원자의 에너지는 주양자수 n인 에너지 상태에는 $2n^2$개의 서로 다른 궤도가 존재한다. 주양자수가 $n=1, 2, 3, \cdots, 9$인 에너지 상태에 있는 모든 궤도의 수는?
(단, 주양자수가 다른 에너지 상태에 있는 궤도들은 서로 다르다.)

[3점][2000학년도 수능]

① 770 ② 570 ③ 408
④ 350 ⑤ 182

23. 입력값의 전체 집합 $=\{0, 1, 2, 3\}$에 대하여, 빨강에서 보라까지 7개의 전등으로 구성된 숫자판을 다음과 같이 점등하고자 한다.



입력값	이진법 표현	점등모양
0	$00_{(2)}$	0
1	$01_{(2)}$	1
2	$10_{(2)}$	2
3	$11_{(2)}$	3

입력값을 이진법의 수로 $pq_{(2)}$와 같이 표현하였을 때, p가 1인 입력값의 집합을 P, q가 1인 입력값의 집합을 Q라 하자. 빨란 전등이 점등되는 모든 입력값의 집합을 올바르게 나타낸 것은?

[3점][2000학년도 수능]

① P ② Q ③ $P \cup Q^c$
④ $P^c \cup Q$ ⑤ $P^c \cap Q^c$

24. 컴퓨터 중앙처리장치의 속도는 1985년 1MHz이던 것이 매 3년마다 약 4배의 비율로 빨라지고 있다. 한 연구에 의하면, 현재 기술로 이와 같은 발전을 지속할 수 있는 중앙처리장치 속도의 한계는 약 4,000MHz라고 한다. 이 연구에서 현재 기술이 한계에 도달할 것으로 예측되는 해는? (단, MHz는 중앙처리장치 속도의 단위이며, $\log 2=0.3$으로 계산한다.)

[3점][2000학년도 수능]

① 2003년 ② 2006년 ③ 2009년
④ 2012년 ⑤ 2024년

주관식 문항(25~30)

25. 다항식 $5x^2+10x+6$이 $(x+a)(x^2+4x+b)$로 인수분해 될 때, $a+b$의 값을 구하시오.

[2점][2000학년도 수능]

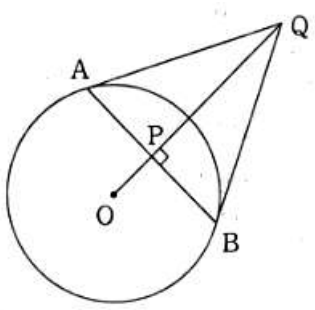
26. 다항함수 $f(x)$가 $\int_2^x f(t)dt = x^2+ax+2$를 만족시킬 때, $f(10)$의 값을 구하시오.

[3점][2000학년도 수능]

27. 직선 $y=x$에 대하여 대칭인 두 직선 $y=ax$, $y=bx$가 이루는 각이 $30°$일 때, $3(a^2+b^2)$의 값을 구하시오.

[3점][2000학년도 수능]

28. 반지름의 길이가 10인 원 O의 내부에 한 점 P가 있다. 점 P를 지나고 직선 OP에 수직인 직선이 원과 만나는 두 점을 A, B에서의 두 접선의 교점을 Q라 하자.



OP=5일 때, 선분 PQ의 길이를 구하시오.

[2점][2000학년도 수능]

29. 1에서 10까지의 자연수 중에서 서로 다른 두 수를 임의로 선택할 때, 선택된 두 수의 곱이 짝수가 되는 경우의 수를 구하시오.

[3점][2000학년도 수능]

30. $-1 \le x \le 1$에서 부등식 $x+a \le x^2 \le 2x+b$가 항상 성립할 때, $b-a$의 최소값을 소수점 아래 둘째 자리까지 구하시오.

[3점][2000학년도 수능]

정답과 해설

1) 정답 ②

준식 $\log 7^{-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2}\log_7 7 = -\frac{1}{2}$

2) 정답 ⑤

$|\vec{a}| = 2,\ |\vec{b}| = 3,\ |\vec{a}-2\vec{b}| = 6$

$|\vec{a}-2\vec{b}|^2 = (\vec{a}-2\vec{b})\cdot(\vec{a}-2\vec{b})$

$= \vec{a}\cdot\vec{a} - 4\vec{a}\cdot\vec{b} + 4\vec{b}\cdot\vec{b}$

$= |\vec{a}|^2 - 4\vec{a}\cdot\vec{b} + 4|\vec{b}|^2$

$= 4 - 4\vec{a}\cdot\vec{b} + 36$ 이므로

$36 = 4 - 4\vec{a}\cdot\vec{b} + 36$

$\therefore\ \vec{a}\cdot\vec{b} = 1$

3) 정답 ②

$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$ 이므로

준식은 $4(1-\sin^2 x) + 4\sin x = 5$ 이고

정리하여 고치면 $(2\sin x - 1)^2 = 0$ 이므로

$\sin x = \frac{1}{2}$

4) 정답 ⑤

$\ln x = t$ 라 하면 $\frac{1}{x}dx = dt$

$x = e^2$ 일 때 $t = 2$, $x = e$ 일 때 $t = 1$ 이므로

준 식 $= \int_1^2 3t^2 dt = 7$

5) 정답 ⑤

$\arg(z) = \frac{\pi}{3}$ 이므로 $|z| = r$ 라 하면

$z = r(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3})$ 이면 $\bar{z} = r(\cos\frac{\pi}{3} - i\sin\frac{\pi}{3})$

주어진 조건에서 $z + \bar{z} = 2$ 이므로

$r(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}) + r(\cos\frac{\pi}{3} - i\sin\frac{\pi}{3}) = 2$

$2r\cos\frac{\pi}{3} = 2,\quad 2r\times\frac{1}{2} = 2 \quad \therefore r = 2$

따라서 $z = 2(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3})$

드 무아브르의 정리에 의하여

$z^3 = \left\{2(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3})\right\}^3$

$= 2^3\left\{\cos(3\times\frac{\pi}{3}) + i\sin(3\times\frac{\pi}{3})\right\}$

$= 8(\cos\pi + i\sin\pi) = -8$

6) 정답 ④

$b = a$, $d = \sqrt{c}$ 에서 $a = b^2$, $c = d^2$

또 주어진 조건에서 $\frac{b+d}{2} = 1$ 이므로

직선 Q의 기울기 $= \frac{d-b}{c-a} = \frac{d-b}{d^2-b^2} = \frac{1}{d+b} = \frac{1}{2}$

7) 정답 ③

$f(t+c) = 3^{-t-c}$, $\frac{1}{2}f(t) = \frac{1}{2}3^{-t}$

$\therefore\ 3^{-t-c} = \frac{1}{2}3^{-t}$

$\therefore\ 3^c = 2$ 에서 $c = \log_3 2$

8) 정답 ②

□ $= x$ 라 하면 $a + \sqrt{b} = \frac{a+\sqrt{x}}{2} + \sqrt{\frac{a-\sqrt{x}}{2}}$

양변을 제곱하면

$a + \sqrt{b} = \frac{a+\sqrt{x}}{2} + \frac{a-\sqrt{x}}{2} + 2\sqrt{\frac{a^2-x}{4}}$

$a + \sqrt{b} = a + \sqrt{a^2-x}$ 이므로 $b = a^2 - x$

$\therefore\ x = a^2 - b$

9) 정답 ②

① $A^c \cup A = U$, $A^c \cap A = \phi$ 이므로

$f(A^c) = f(U) - f(A)$

② $A \subset B$ 일 때, A의 임의의 원소를 x_1 라 하면

$x_1 \in B$ 이므로 $A \subset B$ 이면 $f(A) \leqq f(B)$

③ $n(A\cup B) = n(A) + n(B) - n(A\cap B)$ 이므로

$f(A\cup B) = f(A) + f(B)$ 이기 위해서는

$A \cap B = \phi$ 이어야 한다.

그러므로 $f(A\cup B) = f(A) + f(B)$는 $A\cap B = \phi$ 일 때는 성립하지 않는다.

따라서 항상 옳은 것은 ①, ②이다.

10) 정답 ③

2진법의 수를 10진법의 수로 고치면

$11_{(2)} = 2 + 1$

$101_{(2)} = 2^2 + 1$

$110_{(2)} = 2^2 + 2$

$1001_{(2)} = 2^3 + 1$

$1010_{(2)} = 2^3 + 2$

$1100_{(2)} = 2^3 + 2^2$

10진법의 수들을 군수열로 나타내면

$2+1,\ (2^2+1,\ 2^2+2),\ (2^3+1,\ 2^3+2,\ 2^3+2^2),\ \cdots$

각 군의 항수는 1, 2, 3, 4, …이므로

$+2+3+\cdots+n<56$, $\frac{n(n+1)}{2}<56$에서

$n<10.\cdots$이므로 $n=10$일 때

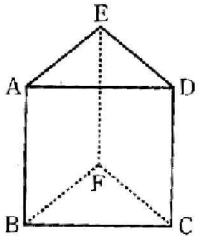
$1+2+3+\cdots+10=55$이므로

제 56항은 11군의 첫째항이다.

따라서, 제 56항은 $2^{1}+1$

11) 정답 ①

$x^3-xy^2=10$의 양변을 x에 관하여 미분하면



$3x^2-(y^2+x\cdot 2y\cdot \frac{dy}{dx})=0$

이므로 $\frac{dy}{dx}=\frac{3x^2-y^2}{2xy}$

따라서 구하는 접선의 기울기는

$(\frac{dy}{dx})=\frac{3\cdot 9-9}{2\cdot(-2)\cdot 3}=-\frac{1}{4}$

12) 정답 ①

$\triangle DE$에서 $AE=\overline{DE}=1$

코사인 제2법칙에 의하여

$AD=\sqrt{1^2+1^2-2\cdot 1\cdot 1\cos\theta}=\sqrt{2-2\cos\theta}$

그림에서 $\overline{EF}\perp\overline{AE}$, $\overline{EF}\perp\overline{DE}$이므로 $\overline{EF}\perp\triangle ADE$

따라서 $\overline{AB}\perp\overline{AD}$ ($\because$ $\overline{EF}//\overline{AB}$)

$\overline{AB}=1$이므로 직사각형 $ABCD$에서

$\overline{BD}=\sqrt{\overline{AB}^2+\overline{AD}^2}=\sqrt{1+2-2\cos\theta}=\sqrt{3-2\cos\theta}$

13) 정답 ③

X	0	1	2	3	합
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{1}{6}$	1

$E(X)=0\times\frac{1}{6}+1\times\frac{2}{6}+2\times\frac{2}{6}+3\times\frac{1}{6}=\frac{3}{2}$

14) 정답 ④

① $D=ad-bc=0$인 경우

일차변환에 의해 직선은 직선으로 변환한다.

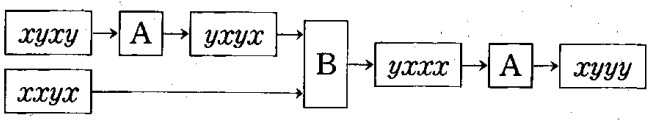
② $D=ad-bc=0$인 경우

일차변환에 의해 평면상의 도형은 원점을 지나는 직선 혹은 점으로 변환한다.

따라서 ①, ②에서 ㄱ과 ㄷ이 맞다.

($\because$ ㄴ에서 곡선은 만들어지지 않는다.)

15) 정답 ④



A에서 x는 y로, y는 x로 바뀌며 B에서는 두 개의 문자열의 순서쌍이 서로 같으면 x로,

서로 다르면 y로 출력되므로 $xyyy$가 출력된다.

16) 정답 ④

직선 AC의 기울기는 $\frac{b}{a-c}$

수직인 직선의 기울기는 $-\frac{a-c}{b}$이므로

(가)$=-\frac{a-c}{b}$

직선 AC에 수직이고 점 E를 지나는 직선의 방정식은

$y=-\frac{a-c}{b}(x-\frac{a+c}{2})+\frac{b}{2}$이므로 정리하면

$y=-\frac{a-c}{b}x+\frac{a^2+b^2-c^2}{2b}$

$\therefore$ (나)$=\frac{a^2+b^2-c^2}{2b}$

$a=c$ 또는 $a=-c$이면

$\overline{AC}\perp BC$ 또는 $\overline{AB}\perp\overline{BC}$이므로

$\triangle ABC$는 직각삼각형

$\therefore$ (다)=직각삼각형

17) 정답 ①

① $n=5k+r$

(단, k는 음이 아닌 정수, $r=0, 1, 2, 3, 4$)

$f(n)=r$, $f(f(n))=f(r)=r$이므로 $f(n)=f(f(n))$

② (반례)

$n=6$일 때 $f(n)=1$이므로 $g(f(n))=g(1)=1$이고

$g(n)=6$이다. $\therefore$ $g(f(n))\neq g(n)$ 따라서 거짓

③ $n=10k+r$

(단, k는 음이 아닌 정수, $r=0, 1, 2, \cdots, 9$)

$f(g(n))=f(r)$

$f(n)=f(10k+r)=f(5\times 2k+r)=f(r)$

$\therefore$ $f(g(n))=f(n)$ 따라서 참

18) 정답 ⑤

(가) n은 3, 7, 11, 19, $\cdots$, p의 배수가 아니므로 n은 3, 7, 11, 19, $\cdots$, p로 나누어 떨어지지 않는다.

(나) $4k+1$꼴의 두 정수를 $4m_1+1$, $4m_2+1$ (m_1, m_2는 음이 아닌 정수)라 하면 이 두 정수의 곱은

$(4m_1+1)(4m_2+1)=4(4m_1m_2+m_1+m_2)+1$

이므로 $4k+1$꼴이다.

(다) n의 모든 소인수는 $4k+1$꼴 또는 $4k+3$꼴의 정수인데 앞에서 n의 모든 소인수가 $4k+1$꼴이면 모순이므로 n은 $4k+3$꼴의 소인수를 갖는다.

19) 정답 ④

$f(0)=\frac{1}{3+4\sin^2\theta}+\frac{1}{3+4\cos^2\theta}$

$$3+4\frac{1-\cos 2\theta}{2}+\frac{1}{3+4\frac{1+\cos 2\theta}{2}}$$

$$=\frac{1}{5-2\cos 2\theta}+\frac{1}{5+2\cos 2\theta}=\frac{10}{25-4\cos 2\theta}$$

그러므로 $f(\theta)$의 최소값은 (분모)$=25-4\cos^2 2\theta$가 최대일 때이다.

따라서, $\cos^2 2\theta=0$일 때 분모는 최대이므로

$f(\theta)$의 최소값은 $\frac{10}{25}=\frac{2}{5}$ 이다.

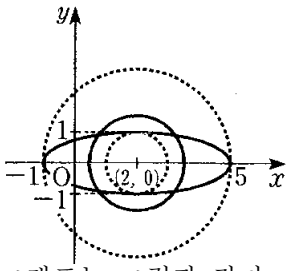
20) 정답 ②

주어진 이차곡선을 변형하면

$(x-2)^2+9y^2=9$이므로

$\frac{(x-2)^2}{3^2}+y^2=1$

$\frac{x^2}{3^2}+y^2=1$을 x축의 방향으로



2만큼 평행이동한 곡선이므로 그래프는 그림과 같다.

따라서 중심이 (2, 0)인 원과 서로 다른 네 점에서 만나려면 타원과 원이 (2, 1), (2, −1)에서 내접하는 경우의 반지름의 길이가 1이고

(5, 0), (−1, 0)에서 외접하는 경우의 반지름의 길이가 3이므로 $1<a<3$

21) 정답 ⑤

$7-x\geq 3|x-3|$ 에서

i) $x\geq 3$일 때, $7-x\geq 3(x-3)$

정리하면 $x\leq 4$이므로 $3\leq x\leq 4$ …… ①

ii) $x<3$일 때, $7-x\geq -3(x-3)$

정리하면 $x\geq 1$이므로 $1\leq x<3$ …… ②

①, ②에서 $1\leq x\leq 4$ …… ③

또, $\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-3}\geq 0$을 정리하면

$2(x-1)(x-2)(x-3)\geq 0$에서

$1<x\leq 2,\ x>3$ ($\because\ x=1,\ x\neq 3$) …… ④

구하는 답은 ③, ④의 공통부분이므로

$1<x\leq 2,\ 3<x\leq 4$

22) 정답 ②

$2\cdot 1^2+2\cdot 2^2+2\cdot 3^2+\cdots+2\cdot 9^2$

$=2(1^2+2^2+3^2+\cdots+9^2)=570$

23) 정답 ③

$pq_{(2)}=2p+q$

i) $p=1, q=0$: $pq_{(2)}=2$

ii) $p=1,\ q=1$: $pq_{(2)}=3$

iii) $p=0,\ q=1$: $pq_{(2)}=1$

$\therefore$ $=\{2, 3\},\ Q=\{1, 3\},\ Q^c=\{0, 2\}$

빨간 전등이 점등되는 경우는 점등모양에서

0, 2, 3이므로 $P\cup Q^c=\{0, 2, 3\}$

24) 정답 ①

매 3년마다의 회수를 n회라 하면

n회 후의 컴퓨터 중앙처리장치의 속도는 $1\cdot 4^n$이다.

이 때, $1\cdot 4^n\leq 4{,}000$

양변에 상용로그를 취하면

$\log 4^n\leq \log 4000=\log 4\times 10^3$

$n\log 4\leqq \log 4+3$

$\therefore\ n\leqq \frac{2\log 2+3}{2\log 2}=6$

이 때 기간은 $3\times 6=18$(년)이 걸리므로

$1985+18=2003$

25) 정답 7

$x^3+5x^2+10x+6=(x+1)(x^2+4x+6)$이므로

$a=1,\ b=6$ $\quad\therefore\ a+b=7$

26) 정답 17

$\int_2^x f(t)dt=x^2+ax+2$에 $x=2$를 대입하면

$0=4+2a+2$이므로 $a=-3$

$\int_2^x f(t)dt=x^2-3x+2$에서 양변을 x에 관하여

미분하면 $f(x)=2x-3$이므로

$f(10)=20-3=17$

27) 정답 10

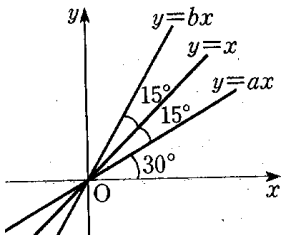
$y=ax$를 $y=x$에 대칭이동

하면 $x=ay$

($\because\ y=x$에 대한 대칭은

$x\to y,\ y\to x$ 대입)

$a\neq 0$이므로 $y=\frac{1}{a}x$



이 직선은 $y=bx$와

일치하므로 $\frac{1}{a}x=bx$(이 식은 x에 대한 항등식이다.)

$\therefore\ ab=1$ … ①

한편 두 직선의 기울기는 $\tan 30^\circ=\frac{1}{3}$,

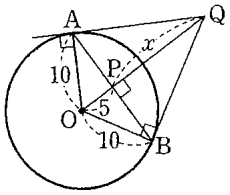
$\tan 60^\circ=\sqrt{3}$이므로 $a+b=\sqrt{3}+\frac{1}{\sqrt{3}}$ … ②

①, ②에서 $3(a^2+b^2)=3\{(a+b)^2-2ab\}=10$

28) 정답 15

그림에서 $\angle AOP=\angle QAP$

이고 $AP = \angle AQP$이므로
$\triangle OAP$와 $\triangle AQP$는 닮은꼴
이다.



따라서 PQ의 길이를 x라 하면

$\overline{AP} = \quad OA \quad - \overline{OP}^2$

$= \quad 10^2 - 5^2 = 5 \quad 3$ 이므로

$\overline{OP} \ : \ \overline{PA} = \overline{PA} \ : \ \overline{PQ}$에서 $5 \ : \ 5\sqrt{3} = 5\sqrt{3} \ : \ x$

$\therefore \ x = 15$

29) 정답 35

1부터 10까지 10개의 자연수 중에서
서로 다른 두 수 를 택하는 방법은

$${}_{10}C_2 = \frac{10 \cdot 9}{2 \cdot 1} = 45 \ \cdots \ ①$$

이 때, 두 수의 곱이 홀수인 경우는
(홀수)×(홀수) ⇒ 홀수이므로

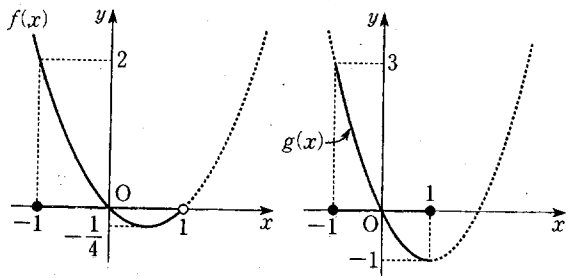
$${}_5C_2 = \frac{5 \cdot 4}{2 \cdot 1} = 10 \ \cdots \ ②$$

따라서 구하는 경우의 수는
①과 ②에서 $45 - 10 = 35$

30) 정답 3.25

주어진 부등식은 $\begin{matrix} x^2 - x \geq a \\ x^2 - 2x \leq b \end{matrix}$ 의 교집합이다.

$f(x) = x^2 - x, \ g(x) = x^2 - 2x$ 라 두면
$-1 \leq x \leq 1$에서 그래프는 다음과 같다.



이 때, $-\frac{1}{4} \leq f(x) \leq 2, \ -1 \leq g(x) \leq 3$이므로

$a \leq -\frac{1}{4}, \ b \geq 3$ 이므로 $-a \geq \frac{1}{4}, \ b \geq 3$

$\therefore \ b - a \geq 3 + \frac{1}{4} = 3.25$

따라서 최소값은 3.25