

■ [공통: 수학 I·수학 II]

01. ④ 02. ③ 03. ② 04. ② 05. ①  
 06. ⑤ 07. ② 08. ③ 09. ① 10. ③  
 11. ③ 12. ④ 13. ⑤ 14. ⑤ 15. ④  
 16. 6 17. 11 18. 38 19. 15 20. 17  
 21. 12 22. 97

1. 출제의도 : 지수법칙을 이용하여 식의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\begin{aligned} & 2^{\frac{3}{2}} \times 4^{-\frac{1}{2}} \\ &= 2^{\frac{3}{2}} \times (2^2)^{-\frac{1}{2}} \\ &= 2^{\frac{3}{2}} \times 2^{-1} \\ &= 2^{\frac{3}{2}-1} \\ &= 2^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

정답 ④

2. 출제의도 : 다항함수의 도함수를 이용하여 미분계수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$f(x) = 2x^3 - x - 4 \text{에서}$$

$$f'(x) = 6x^2 - 1$$

따라서

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = f'(2)$$

$$= 6 \times 2^2 - 1 = 23$$

정답 ③

3. 출제의도 : 등차수열의 성질을 이용하여 항의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

등차수열  $\{a_n\}$ 의 공차를  $d$ 라 하자.

$$a_{10} - a_7 = 9 \text{에서 } 3d = 9, d = 3$$

따라서

$$\begin{aligned} a_7 &= a_2 + 5d \\ &= 2 + 5 \times 3 = 17 \end{aligned}$$

정답 ②

4. 출제의도 : 함수의 연속을 이용하여 상수의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

함수  $f(x)$ 는  $x = 2$ 에서 연속이므로

$$\lim_{x \rightarrow 2-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2-} (7x + a) = 14 + a$$

$$\lim_{x \rightarrow 2+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2+} (x^2 + ax) = 4 + 2a$$

$$f(2) = 14 + a$$

$$\lim_{x \rightarrow 2-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2+} f(x) = f(2) \text{에서}$$

$$14 + a = 4 + 2a$$

$$\text{따라서 } a = 10$$

정답 ②

5. 출제의도 : 정적분의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\begin{aligned} & \int_0^2 (2x^3 + 6x^2 - x) dx \\ &= \left[ \frac{1}{2}x^4 + 2x^3 - \frac{1}{2}x^2 \right]_0^2 \\ &= \frac{1}{2} \times 2^4 + 2 \times 2^3 - \frac{1}{2} \times 2^2 \\ &= 22 \end{aligned}$$

정답 ①

6. 출제의도 : 삼각함수의 최댓값과 주기를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$a, b$ 가 양수이므로 함수

$$f(x) = a \sin \frac{x}{b} + 2 \text{의 최댓값은 } a+2 \text{이고,}$$

$$\text{주기는 } \frac{2\pi}{\frac{1}{b}} = 2b\pi \text{이다.}$$

$$a+2=5 \text{에서 } a=3$$

$$2b\pi=8\pi \text{에서 } b=4$$

$$\text{따라서 } a+b=3+4=7$$

정답 ⑤

7. 출제의도 : 도함수를 활용하여 다항함수의 극댓값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$f(x) = 2x^3 + ax^2 - 4ax \text{에서}$$

$$f'(x) = 6x^2 + 2ax - 4a$$

함수  $f(x)$ 가  $x=1$ 에서 극소이므로

$$f'(1) = 6 + 2a - 4a = 0, \quad a=3$$

$$\text{따라서 } f'(x) = 6x^2 + 6x - 12$$

$$f'(x)=0 \text{에서 } 6(x+2)(x-1)=0$$

$$x=-2 \text{ 또는 } x=1$$

함수  $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $x$     | $\cdots$   | $-2$ | $\cdots$   | $1$ | $\cdots$   |
|---------|------------|------|------------|-----|------------|
| $f'(x)$ | $+$        | $0$  | $-$        | $0$ | $+$        |
| $f(x)$  | $\nearrow$ | 극대   | $\searrow$ | 극소  | $\nearrow$ |

$$f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x \text{이고}$$

함수  $f(x)$ 는  $x=-2$ 에서 극대이므로 극댓값은

$$f(-2)$$

$$= 2 \times (-2)^3 + 3 \times (-2)^2 - 12 \times (-2)$$

$$= 20$$

정답 ②

8. 출제의도 : 등비수열의 일반항을 이용하여 공비를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

등비수열  $\{a_n\}$ 의 공비를  $r$  ( $r > 0$ )이라 하면

$$a_n = a_1 \times r^{n-1} \quad (n \geq 1)$$

이고,

$$S_3 = a_1 + a_2 + a_3$$

이므로

$$\frac{S_3}{a_1 + 2a_2} = \frac{7}{3}$$

에서

$$\frac{a_1 + a_2 + a_3}{a_1 + 2a_2} = \frac{7}{3}$$

$$\frac{a_1 + a_1r + a_1r^2}{a_1 + 2a_1r} = \frac{7}{3}$$

$$a_1 \neq 0 \text{이므로}$$

$$\frac{1+r+r^2}{1+2r} = \frac{7}{3}$$

$$3+3r+3r^2=7+14r$$

$$3r^2-11r-4=0$$

$$(3r+1)(r-4)=0$$

$$r>0\text{이므로 } r=4$$

따라서

$$\frac{a_8}{a_6} = \frac{a_6 \times r^2}{a_6}$$

$$= r^2$$

$$= 4^2 = 16$$

정답 ③

9. 출제의도 : 미분을 이용하여 두 점의 가속도의 차를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

두 점 P, Q의 시각  $t$ 에서의 속도를 각각  $v_1(t)$ ,  $v_2(t)$ 라 하고 가속도를 각각  $a_1(t)$ ,  $a_2(t)$ 라 하자.

$$v_1(t) = \frac{dx_1}{dt} = 12t^2 - 2t - 11$$

$$v_2(t) = \frac{dx_2}{dt} = 4t + 7$$

두 점의 속도가 같아지는 시각  $t$ 는

$$12t^2 - 2t - 11 = 4t + 7 \text{에서}$$

$$6(2t-3)(t+1)=0$$

$$t \geq 0 \text{이므로}$$

$$t = \frac{3}{2}$$

$$a_1(t) = \frac{dv_1}{dt} = 24t - 2$$

$$a_2(t) = \frac{dv_2}{dt} = 4$$

따라서

$$p = a_1\left(\frac{3}{2}\right) = 24 \times \frac{3}{2} - 2 = 34$$

$$q = a_2\left(\frac{3}{2}\right) = 4$$

이므로

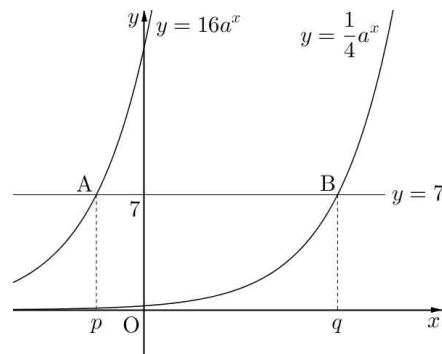
$$p - q = 34 - 4 = 30$$

정답 ①

10. 출제의도 : 지수함수의 성질을 이용하여 미지수의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$a > 1$ 이므로 두 함수  $y = 16a^x$ ,  $y = \frac{1}{4}a^x$ 의 그래프와 직선  $y = 7$ 을 좌표평면에 나타내면 그림과 같다.



두 점 A, B의  $x$ 좌표를 각각  $p$ ,  $q$ 라 하면

$$16a^p = 7, \quad \frac{1}{4}a^q = 7 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉠}$$

$$\overline{AB} = 4 \text{에서 } q = p + 4 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉡}$$

㉠에서  $16a^p = \frac{1}{4}a^q$ 이므로 ㉡을 대입하면

$$16a^p = \frac{1}{4}a^{p+4}$$

$$64a^p = a^p \times a^4$$

$$a^p > 0 \text{이므로}$$

$$a^4 = 64 = 2^6 \text{에서}$$

$$a = 2^{\frac{3}{2}} = 2\sqrt{2}$$

정답 ③

11. 출제의도 : 적분과 미분의 관계를 이용하여 조건을 만족시키는 함수를 찾고, 함수값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\int_{-1}^x f(t)dt = xf(x) - 2x^3 - 3x^2 + 6 \quad \cdots \textcircled{7}$$

⑦의 양변에  $x = -1$  을 대입하면

$$0 = -f(-1) + 2 - 3 + 6$$

$$f(-1) = 5 \quad \cdots \textcircled{8}$$

⑦의 양변을  $x$  에 대하여 미분하면

$$f(x) = f(x) + xf'(x) - 6x^2 - 6x$$

$$xf'(x) = 6x^2 + 6x$$

$x \neq 0$  일 때  $f'(x) = 6x + 6$  이다.

다항함수  $f(x)$  에 대하여 도함수  $f'(x)$  는 실수 전체의 집합에서 연속이므로

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0} (6x + 6) = 6$$

즉, 모든 실수  $x$  에 대하여

$$f'(x) = 6x + 6$$

$$f(x) = \int (6x + 6)dx = 3x^2 + 6x + C \quad (\text{단,}$$

$C$ 는 적분상수)

⑧에서  $f(-1) = 5$  이므로

$$3 - 6 + C = 5, \quad C = 8$$

따라서  $f(0) = 8$

정답 ③

12. 출제의도 : 사인법칙과 코사인법칙을 이용하여 선분의 길이를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$$\begin{aligned} \overline{BC}^2 &= \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 - 2\overline{AB} \times \overline{AC} \cos(\angle BAC) \\ &= 4^2 + 5^2 - 2 \times 4 \times 5 \times \frac{1}{8} \\ &= 36 \end{aligned}$$

이므로  $\overline{BC} = 6$

$$\sin^2(\angle BAC) = 1 - \cos^2(\angle BAC)$$

$$= 1 - \left(\frac{1}{8}\right)^2 = \frac{63}{64}$$

이고  $\angle BAC$ 는 삼각형의 내각이므로

$$\sin(\angle BAC) = \sqrt{\frac{63}{64}} = \frac{3\sqrt{7}}{8}$$

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를  $R$ 이라 하면 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{BC}}{\sin(\angle BAC)} = 2R \text{에서}$$

$$2R = \frac{6}{\frac{3\sqrt{7}}{8}} = \frac{16}{\sqrt{7}} = \frac{16\sqrt{7}}{7}$$

두 삼각형 ABC와 CBD의 외접원이 일치하므로 삼각형 CBD의 외접원의 반지름의 길이도  $R$ 이고 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{BD}}{\sin(\angle BCD)} = 2R \text{에서}$$

$$\begin{aligned} \overline{BD} &= 2R \sin(\angle BCD) \\ &= \frac{16\sqrt{7}}{7} \times \frac{\sqrt{14}}{4} = 4\sqrt{2} \end{aligned}$$

정답 ④

13. 출제의도 : 정적분의 성질을 이용하여 정적분을 계산할 수 있는가?

정답풀이 :

이차함수  $f(x)$ 의 최고차항의 계수가 6이고  $f(0)=0$ 이므로

$f(x)=6x(x-t)$ 라 하면

$$\int_0^2 6x(x-t)dx = \left[ 2x^3 - 3tx^2 \right]_0^2 = 16 - 12t = 4$$

에서  $t=1$

즉  $f(x)=6x(x-1)$ 이다.

ㄱ

$$\int_0^2 |f(x)|dx = \int_0^2 |6x(x-1)|dx$$

$$= \int_0^1 \{-6x(x-1)\}dx + \int_1^2 6x(x-1)dx$$

$$= [-2x^3 + 3x^2]_0^1 + [2x^3 - 3x^2]_1^2$$

$$= 1 + 5 = 6 \quad (\text{참})$$

ㄴ. 일차함수  $g(x)$ 에 대하여  $g(1)=0$ 이므로

0이 아닌 실수  $m$ 에 대하여

$g(x)=m(x-1)$ 이라 하면

$$\int_0^2 (f(x)+g(x))dx = \int_0^2 f(x)dx + \int_0^2 g(x)dx$$

에서

$$\int_0^2 g(x)dx = \int_0^2 m(x-1)dx$$

$$= m \left[ \frac{1}{2}x^2 - x \right]_0^2 = 0$$

이므로  $\int_0^2 f(x)dx = 4$ 이므로

$$\int_0^2 (f(x)+g(x))dx = 4 \quad (\text{참})$$

ㄷ. 조건에서  $\int_0^2 f(x)dx = 4$ 이므로

$$\int_0^2 (f(x)+h(x))dx$$

$$= \int_0^2 f(x)dx + \int_0^2 h(x)dx$$

$$= 4 + \int_0^2 h(x)dx = 4$$

에서

$$\int_0^2 h(x)dx = 0$$

함수  $h(x)$ 가 일차함수이므로 ㄴ에 의하여

0이 아닌 실수  $a$ 에 대하여  $h(x)=a(x-1)$ 이라 하자.

$$f(x)+h(x) = 6x(x-1) + a(x-1)$$

$$= (6x+a)(x-1)$$

$$0 \leq x \leq 2 \text{에서 } \int_0^2 |f(x)+h(x)|dx > 6 \text{임}$$

을 보이자.

$a > 0$ 일 때  $0 \leq x \leq 2$ 에서

$$\begin{aligned} |(6x+a)(x-1)| &= (6x+a)|x-1| \\ &= 6x|x-1| + a|x-1| \\ &= |f(x)| + a|x-1| \end{aligned}$$

$$\int_0^2 |f(x)+h(x)|dx$$

$$= \int_0^2 |f(x)|dx + \int_0^2 |a(x-1)|dx$$

이므로

$$\int_0^2 |a(x-1)|dx$$

$$= a \left\{ \int_0^1 (1-x)dx + \int_1^2 (x-1)dx \right\}$$

$$= a \left\{ \left[ x - \frac{1}{2}x^2 \right]_0^1 + \left[ \frac{1}{2}x^2 - x \right]_1^2 \right\}$$

$$= a$$

이므로

$$\int_0^2 |f(x)+h(x)|dx = 4 + a > 6$$

따라서 조건을 만족시키는 일차함수

$h(x)$ 가 존재한다. (참)

그러므로 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

정답 ⑤

14. 출제의도 : 거듭제곱근의 성질을 활용하여 주어진 식의 값이 자연수가 되도록 하는 자연수  $n$ 의 개수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\sum_{k=1}^n \frac{f(\sqrt[3]{k})}{5f(k)} = F(n) \text{ 이라 하자.}$$

함수  $f(x)$ 의 정의에 의하여

(i)  $\sqrt[3]{k}$ 가 자연수, 즉  $k$ 가 어떤 자연수의 세제곱꼴일 때

$$f(\sqrt[3]{k}) = \frac{1}{\sqrt[3]{k}} \text{ 이므로}$$

$$\frac{f(\sqrt[3]{k})}{5f(k)} = \frac{\frac{1}{\sqrt[3]{k}}}{5 \times \frac{1}{k}} = \frac{k^{\frac{2}{3}}}{5}$$

(ii)  $\sqrt[3]{k}$ 가 자연수가 아닐 때, 즉  $k$ 가 어떤 자연수의 세제곱꼴이 아닐 때

$$f(\sqrt[3]{k}) = 5 \text{ 이므로}$$

$$\frac{f(\sqrt[3]{k})}{5f(k)} = \frac{5}{5 \times \frac{1}{k}} = k$$

(i)에서  $k$ 가 어떤 자연수의 세제곱꼴, 즉  $k = m^3$  ( $m$ 은 자연수)이면

$$\frac{f(\sqrt[3]{k})}{5f(k)} = \frac{m^2}{5}$$

(ii)에서  $k$ 가 어떤 자연수의 세제곱꼴이 아니면  $\frac{f(\sqrt[3]{k})}{5f(k)}$ 의 값은 항상 자연수이다. .... (\*)

즉,  $F(n) = \sum_{k=1}^n \frac{f(\sqrt[3]{k})}{5f(k)}$ 의 값이 자연수가

되도록 하는 자연수  $n$ 의 값을 구하기 위해서는  $n$ 이 어떤 자연수의 세제곱꼴이 될 때를 기준으로 경우를 나누어 살펴보아야 한다.

①  $n = 1 (= 1^3)$ 일 때

$$\frac{f(\sqrt[3]{1})}{5f(1)} = \frac{1^2}{5} = \frac{1}{5} \text{ 이다.}$$

그러므로 (\*)에 의하여  $1 \leq n < 8$ 인 모든 자연수  $n$ 에 대하여  $F(n)$ 의 값은

$\frac{1}{5} + (\text{자연수})$ 의 꼴이고, 이는 자연수가 아니다.

②  $n = 8 (= 2^3)$ 일 때

$$\frac{f(\sqrt[3]{8})}{5f(8)} = \frac{2^2}{5} = \frac{4}{5} \text{ 이다.}$$

즉,  $F(8)$ 의 값은  $\frac{1}{5} + (\text{자연수}) + \frac{4}{5}$ 의 꼴이고, 이는 자연수이다.

그러므로 (\*)에 의하여  $8 \leq n < 27$ 인 모든 자연수  $n$ 에 대하여  $F(n)$ 의 값은 자연수이다.

③  $n = 27 (= 3^3)$ 일 때

$$\frac{f(\sqrt[3]{27})}{5f(27)} = \frac{3^2}{5} = \frac{9}{5} \text{ 이다.}$$

즉,  $F(27)$ 의 값은  $(\text{자연수}) + \frac{9}{5}$ 의 꼴이고, 이는 자연수가 아니다.

그러므로 (\*)에 의하여  $27 \leq n < 64$ 인 모든 자연수  $n$ 에 대하여  $F(n)$ 의 값은

$(\text{자연수}) + \frac{4}{5}$ 의 꼴이고, 이는 자연수가 아니다.

④  $n = 64 (= 4^3)$ 일 때

$$\frac{f(\sqrt[3]{64})}{5f(64)} = \frac{4^2}{5} = \frac{16}{5} \text{ 이다.}$$

즉,  $F(64)$ 의 값은 (자연수)  $+\frac{4}{5} + \frac{16}{5}$ 의

꼴이고, 이는 자연수이다.

그러므로 (\*)에 의하여  $64 \leq n < 125$ 인 모든 자연수  $n$ 에 대하여  $F(n)$ 의 값은 자연수이다.

⑤  $n = 125 (= 5^3)$ 일 때

$$\frac{f(\sqrt[3]{125})}{5f(125)} = \frac{5^2}{5} = 5 \text{이다.}$$

즉,  $F(125)$ 의 값은 (자연수)  $+5$ 의 꼴이고, 이는 자연수이다.

그러므로 (\*)에 의하여  $125 \leq n < 216$ 인 모든 자연수  $n$ 에 대하여  $F(n)$ 의 값은 자연수이다.

⑥  $n = 216 (= 6^3)$ 일 때

$$\frac{f(\sqrt[3]{216})}{5f(216)} = \frac{6^2}{5} = \frac{36}{5} \text{이다.}$$

즉,  $F(216)$ 의 값은 (자연수)  $+\frac{36}{5}$ 의 꼴이고, 이는 자연수가 아니다.

이때  $7^3 = 343 > 300$ 이므로 (\*)에 의하여  $216 \leq n \leq 300$ 인 모든 자연수  $n$ 에 대하여  $F(n)$ 의 값은 (자연수)  $+\frac{36}{5}$ 의 꼴이고, 이는 자연수가 아니다.

① ~ ⑥에 의하여 조건을 만족시키는 자연수  $n$ 의 값의 범위는

$$8 \leq n < 27 \text{ 또는 } 64 \leq n < 216$$

이고, 그 개수는

$$(27-8) + (216-64) = 19 + 152 = 171$$

정답 ⑤

15. 출제의도 : 함수의 극한에 대한 성질을 이용하여 문제를 해결할 수 있는가?

정답풀이 :

$f(x)$ 는 최고차항의 계수가 1인

이차함수이므로

$$f(x) = x^2 + px + q \text{ (단, } p, q \text{는 상수)}$$

라 하자.

$$g(x) = f(x) + f(x-t) \text{라 하면}$$

$$g(x) = x^2 + px + q + (x-t)^2 + p(x-t) + q$$

$$= 2x^2 + 2(p-t)x + t^2 - pt + 2q$$

이다.

모든 실수  $a$ 에 대하여

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{(2x+1)f(x)}{f(x)+f(x-t)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{(2x+1)f(x)}{g(x)}$$

의 극한이 존재하기 위해서는 분모의

$g(x)=0$ 인 실수  $x$ 가 존재하지 않거나

$g(x)=0$ 인 실수  $x$ 에 대하여 분자의 값이

모두 0이 되어야 한다. 이때 방정식

$g(x)=0$ 이 중근을 가지면 분자도 그 근을 중근으로 가져야 한다.

$x$ 에 대한 이차방정식  $g(x)=0$ 의

판별식을  $D$ 라 하면

$$\frac{D}{4} = (p-t)^2 - 2(t^2 - pt + 2q) = p^2 - 4q - t^2$$

이고  $D$ 의 부호에 따라 주어진 극한이 존재하는  $t$ 의 값의 범위를 구할 수 있다.

(i)  $D < 0$ 인 경우

$g(x)=0$ 인 실수  $x$ 가 존재하지

않으므로 모든 실수  $a$ 에 대하여

주어진 극한이 존재한다.

(ii)  $D > 0$ 인 경우

$g(x)=0$ 인 실수  $x$ 의 값은 2개가

존재하고  $t$ 의 값에 따라 변한다.

하지만 분자의 방정식

$$(2x+1)f(x)=0 \text{의 근은 } t \text{와 관계없는}$$

상수이고 서로 다른 실근의 개수는 3

이하이다. 이때  $t$ 의 값이 변함에 따라

달라지는 방정식  $g(x)=0$ 의 근이  
고정된 방정식  $(2x+1)f(x)=0$ 의 근과  
일치할 수 없으므로 조건을  
만족시키지 않는다.

(iii)  $D=0$ 인 경우

$g(x)$ 는 완전제곱식이고 방정식  
 $g(x)=0$ 의 근을 방정식  
 $(2x+1)f(x)=0$ 도 중근으로 가져야  
한다.

(i), (ii), (iii)에서  $t \geq \frac{3}{2}$ 에서 주어진

극한이 존재하기 위해서는  $t = \frac{3}{2}$ 일 때

$D=0$ 이고  $t > \frac{3}{2}$ 일 때  $D \leq 0$ 이어야  
한다.

$$p^2 - 4q - \left(\frac{3}{2}\right)^2 = 0 \text{에서}$$

$$p^2 - 4q = \frac{9}{4} \quad \cdots \textcircled{7}$$

$t = \frac{3}{2}$ 일 때 방정식  $g(x)=0$ 이 중근을  
가지고 그 중근은

$$x = -\frac{p - \frac{3}{2}}{2} = \frac{3-2p}{4}$$

이다.

이차방정식  $f(x)=0$ 의 판별식

$$p^2 - 4q = \frac{9}{4} > 0$$

이므로 이차방정식  $f(x)=0$ 은 서로 다른  
두 실근을 갖고, 방정식

$(2x+1)f(x)=0$ 이 중근을 갖기 위해서는

$$x = -\frac{1}{2} \text{이 중근이고 } f\left(-\frac{1}{2}\right)=0 \text{이어야}$$

한다.

$$\frac{3-2p}{4} = -\frac{1}{2} \text{에서 } p = \frac{5}{2}$$

$$f\left(-\frac{1}{2}\right)=0 \text{에서}$$

$$f\left(-\frac{1}{2}\right) = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)p + q = 0$$

$$\frac{1}{4} - \frac{5}{4} + q = 0$$

$$\text{이므로 } q = 1$$

$$\text{따라서 } f(x) = x^2 + \frac{5}{2}x + 1 \text{이므로}$$

$$f(2) = 2^2 + \frac{5}{2} \times 2 + 1 = 10$$

정답 ④

16. 출제의도 : 로그방정식을 풀 수 있  
는가?

정답풀이 :

$$\log_3(x-3) = \log_9(2x-3)$$

에서 진수 조건에 의하여

$$x-3 > 0, 2x-3 > 0$$

$$\text{즉, } x > 3$$

$$\log_3(x-3) = \log_9(x-3)^2$$

이므로

$$\log_9(x-3)^2 = \log_9(2x-3)$$

에서

$$(x-3)^2 = 2x-3$$

$$x^2 - 6x + 9 = 2x - 3$$

$$x^2 - 8x + 12 = 0$$

$$(x-2)(x-6) = 0$$

$$x > 3 \text{이므로}$$

$$x = 6$$

정답 6

17. 출제의도 : 부정적분을 이용하여 함수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\begin{aligned} f'(x) &= 6x^2 - 2x \text{에서} \\ f(x) &= \int (6x^2 - 2x) dx \\ &= 2x^3 - x^2 + C \quad (C \text{는 적분상수}) \\ f(0) &= 10 \text{에서 } C = 10 \\ \text{따라서 } f(x) &= 2x^3 - x^2 + 10 \text{이므로} \\ f(1) &= 2 - 1 + 10 = 11 \end{aligned}$$

정답 11

18. 출제의도 : 귀납적으로 정의된 수열의 항을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\begin{aligned} a_1 &= 28 \text{로 짝수이므로} \\ a_2 &= \frac{1}{2}a_1 = \frac{1}{2} \times 28 = 14 \\ a_2 &= 14 \text{로 짝수이므로} \\ a_3 &= \frac{1}{2}a_2 = \frac{1}{2} \times 14 = 7 \\ a_3 &= 7 \text{로 홀수이므로} \\ a_4 &= 2a_3 + 12 = 2 \times 7 + 12 = 26 \\ a_4 &= 26 \text{으로 짝수이므로} \\ a_5 &= \frac{1}{2}a_4 = \frac{1}{2} \times 26 = 13 \\ a_5 &= 13 \text{으로 홀수이므로} \\ a_6 &= 2a_5 + 12 = 2 \times 13 + 12 = 38 \end{aligned}$$

정답 38

19. 출제의도 : 도함수를 활용하여 접선의 방정식을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\begin{aligned} f(x) &= x^3 - 3x^2 - x + 2 \text{라 하면} \\ f'(x) &= 3x^2 - 6x - 1 \\ \text{직선과 곡선이 접하는 점의 } x \text{좌표를 } t \text{라 하면} \\ f'(t) &= 3t^2 - 6t - 1 = 8 \text{에서} \\ 3t^2 - 6t - 9 &= 0, \quad 3(t+1)(t-3) = 0 \\ t &= -1 \text{ 또는 } t = 3 \\ \text{기울기가 8이고 } y \text{절편이 양수인 직선의} \\ \text{방정식을 } y &= 8x + a (a \text{는 } a > 0 \text{인 상수)라} \\ \text{하면} \\ \text{(i) } t &= -1 \text{일 때} \\ f(-1) &= (-1)^3 - 3 \times (-1)^2 - (-1) + 2 = -1 \\ \text{이므로} \\ -1 &= 8 \times (-1) + a, \quad a = 7 \\ \text{(ii) } t &= 3 \text{일 때} \\ f(3) &= 3^3 - 3 \times 3^2 - 3 + 2 = -1 \text{이므로} \\ -1 &= 8 \times 3 + a, \quad a = -25 \text{이고 이는 조건을} \\ \text{만족시키지 않는다.} \\ \text{(i), (ii)에 의하여 구하는 직선의 방정} \\ \text{식은 } y &= 8x + 7 \\ \text{이 직선이 점 } (1, k) &\text{를 지나므로} \\ k &= 8 \times 1 + 7 = 15 \end{aligned}$$

정답 15

20. 출제의도 : 삼각함수의 그래프의 대칭성을 이용하여 미지수의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

점  $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$ 을 E라 하자.

곡선  $y=g(x)$ 가 점 E를 지나고, 두 점 A, D가 점 E에 대하여 대칭이므로

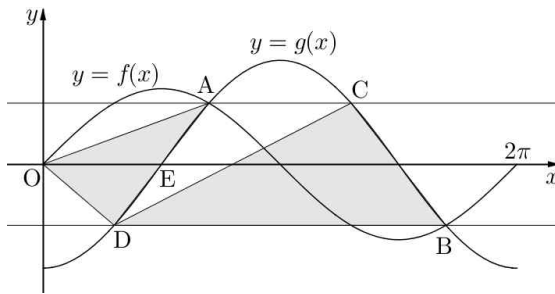
점 A의  $x$ 좌표를  $a$ 라 하면

점 D의  $x$ 좌표는  $\pi-a$ 이다.

또, 두 점 B, D는 직선  $x=\pi$ 에 대하여 대칭이므로 점 B의  $x$ 좌표는  $\pi+a$ 이다.

즉, 두 점 B, D의 좌표는 다음과 같다.

$B(\pi+a, -\sin a)$ ,  $D(\pi-a, -\sin a)$



삼각형 CDB의 넓이는

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \times \overline{DB} \times 2\sin a &= \frac{1}{2} \times 2a \times 2\sin a \\ &= 2a \sin a \end{aligned}$$

선분 AD가  $x$ 축과 만나는 점이 E이므로 삼각형 AOD의 넓이는 삼각형 AOE와 삼각형 ODE의 넓이의 합과 같다.

즉

(삼각형 AOD의 넓이)

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} \times \overline{OE} \times \sin a + \frac{1}{2} \times \overline{OE} \times \sin a \\ &= 2 \times \left( \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{2} \times \sin a \right) \\ &= \frac{\pi}{2} \sin a \end{aligned}$$

(삼각형 AOD의 넓이)

$$= \frac{5}{14} \times (\text{삼각형 CDB의 넓이})$$

이므로

$$\frac{\pi}{2} \sin a = \frac{5}{14} \times 2a \sin a$$

에서  $a = \frac{7}{10}\pi$ 이다.

따라서  $k = -\tan\left(\frac{7}{10}\pi\right)$ 이다.

이때

$$p(a) = \pi + a, \quad q(a) = \pi - a, \quad \alpha = \frac{7}{10}\pi$$

이므로

$$p(\alpha) = p\left(\frac{7}{10}\pi\right) = \pi + \frac{7}{10}\pi = \frac{17}{10}\pi$$

$$q(\alpha) = q\left(\frac{7}{10}\pi\right) = \pi - \frac{7}{10}\pi = \frac{3}{10}\pi$$

따라서

$$3 \times \frac{p(\alpha)}{q(\alpha)} = 3 \times \frac{\frac{17}{10}\pi}{\frac{3}{10}\pi} = 17$$

정답 17

21. 출제의도 : 함수의 미분을 이용하여 조건을 만족시키는 함수를 찾고 함수값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

조건 (가)에서 방정식  $f(x)=0$ 의 서로 다른 실근의 개수가 2이므로 중근을  $\alpha$ , 다른 한 근을  $\beta$ 라 하면

$$f(x) = (x-\alpha)^2(x-\beta)$$

$$x < \beta, \quad x \neq \alpha \text{에서 } f(x) < 0$$

$$x \geq \beta \text{에서 } f(x) \geq 0$$

$$f(\alpha) = 0 \text{이므로}$$

조건 (나)에서

$$g(x) = \begin{cases} -(x-\alpha)^2(x-\beta) & (x \geq \beta) \\ 7(x-\alpha)^2(x-\beta) & (x < \beta) \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow \beta^-} \frac{g(x) - g(\beta)}{x - \beta}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \beta^-} \frac{7(x - \alpha)^2(x - \beta)}{x - \beta}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \beta^-} 7(x - \alpha)^2$$

$$= 7(\beta - \alpha)^2,$$

$$\lim_{x \rightarrow \beta^+} \frac{g(x) - g(\beta)}{x - \beta}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \beta^+} \frac{-(x - \alpha)^2(x - \beta)}{x - \beta}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \beta^+} \{-(x - \alpha)^2\}$$

$$= -(\beta - \alpha)^2$$

$\alpha \neq \beta$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow \beta^-} \frac{g(x) - g(\beta)}{x - \beta} \neq \lim_{x \rightarrow \beta^+} \frac{g(x) - g(\beta)}{x - \beta} \text{가}$$

되어 함수  $g(x)$ 는  $x = \beta$ 에서만 미분가능하지 않다. ....⊙

$p(x) = (x - 1)(x - a)(x - 4 + a)$ 라 하면

방정식  $p(x) = 0$ 의 실근은

$$x = 1 \text{ 또는 } x = a \text{ 또는 } x = 4 - a$$

$1 = a = 4 - a$ 가 될 수 없으므로

함수  $|p(x)|$ 가 미분가능하지 않은  $x$ 의 개수는 1 이상 3 이하이다. ....⊖

조건 (나)에서 함수  $h(x) = g(x) + |p(x)|$ 가 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로 ⊙, ⊖에서 두 함수  $g(x)$ ,  $|p(x)|$ 는  $x = \beta$ 에서만 미분가능하지 않아야 한다.

함수  $|p(x)|$ 가  $x = \beta$ 에서만 미분가능하지 않아야 하므로

$$1 = a \text{ 또는 } a = 4 - a \text{ 또는 } 4 - a = 1$$

즉,  $a = 1$  또는  $a = 2$  또는  $a = 3$ 이다.

(i)  $a = 1$  또는  $a = 3$ 인 경우

$$p(x) = (x - 1)^2(x - 3) \text{ 이고}$$

함수  $|p(x)|$ 는  $x = 3$ 에서만 미분가능하지 않으므로

$$\beta = 3$$

$$f(x) = (x - \alpha)^2(x - 3)$$

조건 (나)에서 함수  $h(x)$ 가  $x = 3$ 에서 미분가능하므로

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{h(x) - h(3)}{x - 3}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{7(x - \alpha)^2(x - 3) - (x - 1)^2(x - 3)}{x - 3}$$

$$= 7(3 - \alpha)^2 - 4$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{h(x) - h(3)}{x - 3}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{-(x - \alpha)^2(x - 3) + (x - 1)^2(x - 3)}{x - 3}$$

$$= -(3 - \alpha)^2 + 4$$

$$7(3 - \alpha)^2 - 4 = -(3 - \alpha)^2 + 4$$

$$(3 - \alpha)^2 = 1$$

$$\alpha = 2 \text{ 또는 } \alpha = 4$$

$$f(0) = -3\alpha^2 \text{ 이므로}$$

$$f(0) \text{의 값은 } -12 \text{ 또는 } -48$$

(ii)  $a = 2$ 인 경우

$$p(x) = (x - 2)^2(x - 1) \text{ 이고}$$

함수  $|p(x)|$ 는  $x = 1$ 에서만 미분가능하지 않으므로

$$\beta = 1$$

$$f(x) = (x - \alpha)^2(x - 1)$$

조건 (나)에서 함수  $h(x)$ 가  $x = 1$ 에서 미분가능하므로

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{h(x) - h(1)}{x - 1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{7(x - \alpha)^2(x - 1) - (x - 2)^2(x - 1)}{x - 1}$$

$$= 7(1 - \alpha)^2 - 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{h(x) - h(1)}{x - 1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{-(x - \alpha)^2(x - 1) + (x - 2)^2(x - 1)}{x - 1}$$

$$= -(1 - \alpha)^2 + 1$$

$$7(1-\alpha)^2 - 1 = -(1-\alpha)^2 + 1$$

$$(1-\alpha)^2 = \frac{1}{4}$$

$$\alpha = \frac{1}{2} \text{ 또는 } \alpha = \frac{3}{2}$$

$$f(0) = -\alpha^2 \text{ 이므로}$$

$$f(0) \text{의 값은 } -\frac{1}{4} \text{ 또는 } -\frac{9}{4}$$

(i), (ii)에서  $f(0)$ 의 최댓값은  $-\frac{1}{4}$ , 최  
솟값은  $-48$ 이므로 최댓값과 최솟값의  
곱은

$$-\frac{1}{4} \times (-48) = 12$$

정답 12

22. 출제의도 : 지수함수와 로그함수의  
그래프를 이용하여 문제를 해결할 수 있  
는가?

정답풀이 :

$$f(x) = 2x^2 - \frac{7}{2}x + 3,$$

$$g(x) = 2x^2 - \frac{15}{2}x + \frac{15}{2}$$

라 하고, 네 점 A, B, C, D의 좌표를  
각각

$$A(r, f(r)), B(s, f(s)), C(u, g(u)),$$

$$D(v, g(v)) \quad (r < s)$$

라 하자.

직사각형 ABCD에서 두 직선 AB, CD가  
서로 평행하므로

$$\frac{f(s) - f(r)}{s - r} = \frac{g(v) - g(u)}{v - u}$$

$$\frac{2(s^2 - r^2) - \frac{7}{2}(s - r)}{s - r}$$

$$= \frac{2(v^2 - u^2) - \frac{15}{2}(v - u)}{v - u}$$

$$2(s + r) - \frac{7}{2} = 2(v + u) - \frac{15}{2}$$

$$u + v = r + s + 2 \quad \dots\dots\textcircled{7}$$

또, 직사각형 ABCD에서 두 선분 AC,  
BD의 중점이 일치하므로

$$\frac{r + u}{2} = \frac{s + v}{2}$$

$$u - v = s - r \quad \dots\dots\textcircled{8}$$

$\textcircled{7}$ ,  $\textcircled{8}$ 에서

$$u = s + 1, \quad v = r + 1$$

한편,  $g(x) = f(x - 1) - 1$ 이므로

$$g(u) = g(s + 1) = f(s) - 1$$

$$g(v) = g(r + 1) = f(r) - 1$$

즉, 두 점 C, D의 좌표는

$$C(s + 1, f(s) - 1), D(r + 1, f(r) - 1)$$

이때 직선 BC의 기울기는

$$\frac{(f(s) - 1) - f(s)}{(s + 1) - s} = -1$$

이고 사각형 ABCD가 직사각형이므로  
직선 AB의 기울기는 1이다.

그러므로 두 점 A, B는 상수  $k$ 에  
대하여 직선  $y = x + k$  위에 있다고 할  
수 있다.

두 점  $A(r, r + k)$ ,  $B(s, s + k)$ 가 곡선  
 $y = a^x$  위에 있으므로

$$a^r = r + k, \quad a^s = s + k \quad \dots\dots\textcircled{9}$$

점  $C(s + 1, s + k - 1)$ 이

곡선  $y = \log_a \left( x - \frac{1}{4} \right) - \frac{1}{4}$  위에 있으므로

$$s + k - 1 = \log_a \left( s + 1 - \frac{1}{4} \right) - \frac{1}{4}$$

$$s+k-\frac{3}{4}=\log_a\left(s+\frac{3}{4}\right) \qquad \qquad \qquad =\left(\frac{3}{2}\right)^4$$

$$s+\frac{3}{4}=a^{s+k-\frac{3}{4}}=a^s\times a^{k-\frac{3}{4}} \qquad \qquad \qquad =\frac{81}{16}$$

위의 식에 ㉠을 대입하면

에서  $p=16$ ,  $q=81$ 이므로

$$p+q=16+81=97$$

정답 97

$$s+\frac{3}{4}=(s+k)\times a^{k-\frac{3}{4}} \qquad \dots\dots\textcircled{\ominus}$$

점  $D(r+1, r+k-1)$ 에 대하여 마찬가지로  
방법으로 하면

$$r+\frac{3}{4}=(r+k)\times a^{k-\frac{3}{4}} \qquad \dots\dots\textcircled{\ominus}$$

㉠에서 ㉡을 빼면

$$s-r=(s-r)\times a^{k-\frac{3}{4}}$$

$s\neq r$ 이므로

$$a^{k-\frac{3}{4}}=1$$

$$\text{즉, } k=\frac{3}{4}$$

그러므로 두 점 A, B는 곡선

$$y=2x^2-\frac{7}{2}x+3 \text{과 직선 } y=x+\frac{3}{4} \text{의}$$

교점이다.

$$2x^2-\frac{7}{2}x+3=x+\frac{3}{4}$$

$$8x^2-18x+9=0$$

$$(2x-3)(4x-3)=0$$

$$x=\frac{3}{2} \text{ 또는 } x=\frac{3}{4}$$

$$r<s \text{이므로 } r=\frac{3}{4}, s=\frac{3}{2}$$

$$\text{즉, 점 A의 좌표가 } \left(\frac{3}{4}, \frac{3}{2}\right) \text{이고 이}$$

점이 곡선  $y=a^x$  위에 있으므로

$$a^{\frac{3}{4}}=\frac{3}{2}$$

따라서

$$a^3=\left(\frac{3}{2}\right)^4$$

■ [선택: 확률과 통계]

23. ① 24. ④ 25. ⑤ 26. ② 27. ③  
28. ⑤ 29. 190 30. 170

23. 출제의도 : 같은 것이 있는 순열의 수를 이용하여 경우의 수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

다섯 개의 숫자 1, 2, 3, 3, 3을 모두 일렬로 나열하는 경우의 수는

$$\frac{5!}{3!} = 5 \times 4 = 20$$

정답 ①

24. 출제의도 : 조건부확률의 뜻과 여사건의 확률을 이용하여 확률을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$P(B|A) = \frac{2}{3} \text{에서}$$

$$\frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{2}{3} \dots \text{㉠}$$

$$P(A^C) = \frac{2}{5} \text{에서 } 1 - P(A) = \frac{2}{5} \text{이므로}$$

$$P(A) = \frac{3}{5}$$

㉠에 대입하면

$$P(A \cap B) = \frac{2}{3} \times P(A) = \frac{2}{3} \times \frac{3}{5} = \frac{2}{5}$$

정답 ④

25. 출제의도 : 이항정리를 이용하여 전개식에서 특정한 항의 계수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$\left(2x^3 + \frac{1}{x^2}\right)^4$ 의 전개식의 일반항은

$${}_4C_r \times (2x^3)^{4-r} \times \left(\frac{1}{x^2}\right)^r$$

$$= {}_4C_r \times 2^{4-r} \times x^{12-5r}$$

(단,  $r=0, 1, 2, 3, 4$ )

$x^2$ 의 계수는  $r=2$ 일 때이므로

$${}_4C_2 \times 2^{4-2} = 6 \times 4 = 24$$

정답 ⑤

26. 출제의도 : 확률의 덧셈정리를 이용하여 확률을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

한 개의 주사위를 두 번 던져 나오는 모든 경우의 수는

$$6^2 = 36$$

이때  $a$ 가 3 이하인 사건을  $E$ ,  $a \times b$ 가 8의 배수인 사건을  $F$ 라 하면 구하는 확률은  $P(E \cup F)$ 이다.

(i) 사건  $E$ 가 일어나는 경우는  $a$ 는 1, 2, 3 중 하나,  $b$ 는 1, 2, 3, 4, 5, 6 중 하나인 경우이므로

$$3 \times 6 = 18$$

$$\text{그러므로 } P(E) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$$

(ii) 사건  $F$ 가 일어나는 경우는 순서쌍  $(a, b)$ 가  $(2, 4), (4, 2), (4, 4), (4, 6), (6, 4)$ 인 5가지 경우이므로

$$P(F) = \frac{5}{36}$$

(iii) 사건  $E \cap F$ 가 일어나는 경우는 순서쌍  $(a, b)$ 가  $(2, 4)$ 인 한 가지 경우뿐이므로

$$P(E \cap F) = \frac{1}{36}$$

(i), (ii), (iii)에 의하여

$$P(E \cup F) = P(E) + P(F) - P(E \cap F)$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{5}{36} - \frac{1}{36}$$

$$= \frac{11}{18}$$

정답 ②

27. 출제의도 : 표준정규분포표를 이용하여 정규분포를 따르는 확률변수에 대한 확률을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

정규분포  $N(1, \sigma^2)$ 을 따르는 확률변수  $X$ 에 대하여  $Z = \frac{X-1}{\sigma}$ 이라 하면 확률변수  $Z$ 는 표준정규분포  $N(0, 1)$ 을 따른다.

이때

$$P\left(\frac{3}{2}\sigma \leq X \leq 2\sigma\right)$$

$$= P\left(\frac{\frac{3}{2}\sigma - 1}{\sigma} \leq Z \leq \frac{2\sigma - 1}{\sigma}\right)$$

$$= P\left(1.5 - \frac{1}{\sigma} \leq Z \leq 2 - \frac{1}{\sigma}\right) = 0.044$$

한편, 표준정규분포표에서

$$P(1.5 \leq Z \leq 2)$$

$$= P(0 \leq Z \leq 2) - P(0 \leq Z \leq 1.5)$$

$$= 0.4772 - 0.4332$$

$$= 0.044$$

이고,

$$P(-2 \leq Z \leq -1.5) = P(1.5 \leq Z \leq 2)$$

이므로

$$2 - \frac{1}{\sigma} = 2 \quad \text{또는} \quad 2 - \frac{1}{\sigma} = -1.5$$

$$\frac{1}{\sigma} \neq 0 \text{이므로} \quad \frac{1}{\sigma} = 2 + 1.5 = 3.5 = \frac{7}{2}$$

$$\text{즉, } \sigma = \frac{2}{7}$$

따라서 확률변수  $X$ 는 정규분포

$N\left(1, \left(\frac{2}{7}\right)^2\right)$ 을 따르므로

$$P\left(X \geq \frac{10}{7}\right) = P\left(Z \geq \frac{\frac{10}{7} - 1}{\frac{2}{7}}\right)$$

$$= P(Z \geq 1.5)$$

$$= 0.5 - P(0 \leq Z \leq 1.5)$$

$$= 0.5 - 0.4332$$

$$= 0.0668$$

정답 ③

28. 출제의도 : 조건부확률을 이용하여 확률을 계산할 수 있는가?

정답풀이 :

시행을 4번 반복한 후 6장의 카드가 1번째 자리에서부터 차례로 A, A, A, B, B, B가 보이도록 놓여있는 사건을  $X$ , 3번째 시행에서 나온 눈의 수가 6인 사건을  $Y$ 라 하면 구하는 확률은  $P(Y|X)$ 이다.

6장의 카드가 1번째 자리에서부터 차례로 A, A, A, B, B, B가 보이도록 놓여 있는 상태를 AAABBB라고 표기하자.

카드가 처음 나열된 상태 AAABBB에서는 한 번의 시행에서  $k=3$ 일 때만 카드의 나열이 AABABB로 바뀌고 나머지 5가지 경우는 그대로 AAABBB이다.

카드의 나열이 AABABB일 때에는 한 번의 시행에서  $k=2$ 이면 카드의 나열이 ABAABB로 바뀌고,  $k=3$ 이면 카드의 나열이 다시 AAABBB가 되고,  $k=4$ 이면 카드의 나열이 AABBAB로 바뀌며, 나머지 3가지 경우는 그대로 AABABB이다.

즉, AAABBB에서 시행을 2번 반복한 후 카드의 나열이

AAABBB일 확률은

$$\frac{5}{6} \times \frac{5}{6} + \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{26}{6^2},$$

AABABB일 확률은

$$\frac{5}{6} \times \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \times \frac{3}{6} = \frac{8}{6^2},$$

$$\text{ABAABB일 확률은 } \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{6^2},$$

$$\text{AABBAB일 확률은 } \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{6^2}$$

이다.

이때 어떠한 나열에서 특정한 나열로 변할 확률과 그 나열에서 다시 원래의 나열로 돌아올 확률은 항상 같다.

따라서 2번의 시행을 통해 특정한 나열이 될 확률과 그 나열에서 다시 2번의 시행을 통해 원래의 나열로 돌아올 확률이 동일하다.

즉, 이 시행을 4번 반복한 후 카드의 나열이 다시 AAABBB가 되는 확률은 시행을 2번 반복한 후 가능한 나열들의 각

확률들을 제공하여 더한 것과 같으므로

$$\begin{aligned} P(X) &= \left(\frac{26}{6^2}\right)^2 + \left(\frac{8}{6^2}\right)^2 + \left(\frac{1}{6^2}\right)^2 + \left(\frac{1}{6^2}\right)^2 \\ &= \frac{26^2 + 8^2 + 1^2 + 1^2}{6^4} = \frac{742}{6^4} \end{aligned}$$

이제 이 시행을 4번 반복한 후 카드의 나열이 다시 AAABBB가 되는 경우 중에서 3번째 시행에서 나온 눈의 수가 6인 경우를 생각해 보자.

3번째 시행에서  $k=6$ 이면 2번째 시행 후의 나열과 3번째 시행 후의 카드의 나열이 바뀌지 않는다. 그러므로 4번째 시행으로 다시 AAABBB가 되려면 2번째 시행 후의 나열이 AAABBB 또는 AABABB이어야 한다.

$$\text{2번째 시행 후 AAABBB일 확률은 } \frac{26}{6^2},$$

$$\text{3번째 시행에서 } k=6 \text{ 일 확률은 } \frac{1}{6},$$

4번째 시행 후 다시 AAABBB가 될 확률은  $\frac{5}{6}$  이므로 이 경우의 확률은

$$\frac{26}{6^2} \times \frac{1}{6} \times \frac{5}{6} = \frac{130}{6^4}$$

$$\text{또한, 2번째 시행 후 AABABB일 확률은 } \frac{8}{6^2},$$

$$\text{3번째 시행에서 } k=6 \text{ 일 확률은 } \frac{1}{6},$$

4번째 시행 후 다시 AAABBB가 될 확률은  $\frac{1}{6}$  이므로 이 경우의 확률은

$$\frac{8}{6^2} \times \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{8}{6^4}$$

그러므로

$$P(X \cap Y) = \frac{130}{6^4} + \frac{8}{6^4} = \frac{138}{6^4}$$

따라서

$$\begin{aligned} P(Y|X) &= \frac{P(X \cap Y)}{P(X)} \\ &= \frac{\frac{138}{6^4}}{\frac{742}{6^4}} \\ &= \frac{138}{742} = \frac{69}{371} \end{aligned}$$

정답 ⑤

29. 출제의도 : 중복조합을 이용하여 경우의 수를 구하는 문제를 해결할 수 있는가?

정답풀이 :

조건 (가)의  $a+b+c+d=14$ 를 만족시키는 자연수  $a, b, c, d$ 의 모든 순서쌍  $(a, b, c, d)$ 의 개수를 구하자.

$a'=a-1, b'=b-1, c'=c-1, d'=d-1$ 이라 하면

$a'+b'+c'+d'=10$  (단,  $a', b', c', d'$ 은 음이 아닌 정수)

이를 만족시키는 음이 아닌 정수  $a', b', c', d'$ 의 모든 순서쌍  $(a', b', c', d')$ 의 개수는 서로 다른 4개에서 중복을 허락하여 10개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_4H_{10} = {}_{13}C_{10} = {}_{13}C_3 = \frac{13 \times 12 \times 11}{3 \times 2 \times 1} = 286$$

즉,  $a+b+c+d=14$ 를 만족시키는 자연수  $a, b, c, d$ 의 모든 순서쌍  $(a, b, c, d)$ 의 개수는 286이다.

조건 (가)를 만족시키는 사건을 전체 사건이라 할 때 (나)에서  $10a \geq d$ 이고  $c < d^2$ 인 사건의 여사건은  $10a < d$ 이거나  $c \geq d^2$ 인 사건이다.

$10a < d$ 인 사건을  $A$ ,  $c \geq d^2$ 인 사건을  $B$ 라 하자.

사건  $A$ 가 일어나는 경우의 수를 구하자.

$a \geq 1$ 이므로  $10a \geq 10$ 이고, 부등식

$10a < d$ 를 만족하려면  $d > 10$ 이어야 한다. .... ㉠

$a, b, c$ 가 자연수이므로  $a+b+c \geq 3$ 이고,  $a+b+c+d=14$ 에서  $d$ 의 최댓값은 11이다. .... ㉡

㉠, ㉡에서  $d=11$ 이고 이때  $a+b+c=3$ 이 되어 순서쌍  $(a, b, c, d)$ 는  $(1, 1, 1, 11)$ 으로 유일하다.

즉, 사건  $A$ 가 일어나는 경우의 수는 1이다.

사건  $B$ 가 일어나는 경우의 수를  $d$ 의 값에 따라 경우를 나누어 구하자.

(i)  $d=1$ 일 때 :  $c \geq d^2$ 에서  $c \geq 1$

$a+b+c+d=14$ , 즉  $a+b+c=13$ 에서

$$a'=a-1, b'=b-1, c'=c-1$$

이라 하면  $a', b', c'$ 는 모두 음이 아닌 정수이고  $a'+b'+c'=10$ 이므로 이를 만족시키는  $a', b', c'$ 의 모든 순서쌍  $(a', b', c')$ 의 개수는

$${}_3H_{10} = {}_{12}C_{10} = {}_{12}C_2 = 66$$

(ii)  $d=2$ 일 때 :  $c \geq d^2$ 에서  $c \geq 4$

$a+b+c+d=14$ , 즉  $a+b+c=12$ 에서

$$a'=a-1, b'=b-1, c'=c-4$$

라 하면  $a', b', c'$ 는 모두 음이 아닌 정수이고  $a'+b'+c'=6$ 이므로 이를 만족시키는  $a', b', c'$ 의 모든 순서쌍  $(a', b', c')$ 의 개수는

$${}_3H_6 = {}_8C_6 = {}_8C_2 = 28$$

(iii)  $d=3$ 일 때 :  $c \geq d^2$ 에서  $c \geq 9$

$a+b+c+d=14$ , 즉  $a+b+c=11$ 에

서

$$a' = a - 1, b' = b - 1, c' = c - 9$$

라 하면  $a', b', c'$  는 모두 음이 아닌 정수이고  $a' + b' + c' = 0$  이므로 이를 만족시키는  $a', b', c'$  의 모든 순서쌍  $(a', b', c')$  의 개수는  $(0, 0, 0)$  으로 1

(iv)  $d \geq 4$  일 때 :  $c \geq d^2$  에서  $c \geq 16$

$a + b + c + d = 14$  를 만족시키는 자연수  $c$  는 존재하지 않는다.

(i)~(iv)에서 사건  $B$  가 일어나는 경우의 수는

$$66 + 28 + 1 = 95$$

사건  $A$  가 일어나는 유일한 경우인  $(1, 1, 1, 11)$  은  $c = 1, d = 11$  이므로  $c \geq d^2$  를 만족시키지 않는다.

즉,  $n(A \cap B) = 0$  이므로

$$n(A \cup B) = 1 + 95 = 96$$

따라서 구하는 순서쌍의 개수는

$$286 - 96 = 190$$

정답 190

30. 출제의도 : 표본평균의 평균과 분산을 이용하여 문제를 해결할 수 있는가?

정답풀이 :

숫자 0, 1, 2가 각각 하나씩 적혀 있는 세 개의 공이 들어 있는 주머니에서 임의로 한 개의 공을 꺼내어 공에 적혀 있는 수를 확률변수  $X$ 라 하면  $X$ 의 확률분포는 다음과 같다.

| $X$      | 0             | 1             | 2             | 합계 |
|----------|---------------|---------------|---------------|----|
| $P(X=x)$ | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{3}$ | 1  |

$$E(X) = 0 \times \frac{1}{3} + 1 \times \frac{1}{3} + 2 \times \frac{1}{3} = 1$$

$$\begin{aligned} V(X) &= E(X^2) - (E(X))^2 \\ &= 0^2 \times \frac{1}{3} + 1^2 \times \frac{1}{3} + 2^2 \times \frac{1}{3} - 1^2 \\ &= \frac{5}{3} - 1 = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

이때 확률변수  $\bar{X}$ 는 크기가 5인 표본의 표본평균이므로

$$E(\bar{X}) = E(X) = 1$$

$$V(\bar{X}) = \frac{V(X)}{5} = \frac{2}{3} \times \frac{1}{5} = \frac{2}{15}$$

한편,

$\bar{X}$ 가 가질 수 있는 값은  $0 \leq k \leq 10$ 인

정수  $k$ 에 대하여  $\frac{k}{5}$ 이므로

$$E(\bar{X}^2) = \sum_{k=0}^{10} \left\{ \left( \frac{k}{5} \right)^2 \times P\left(\bar{X} = \frac{k}{5}\right) \right\}$$

이고,

$$\begin{aligned} E(\bar{X}^2) &= V(\bar{X}) + (E(\bar{X}))^2 \\ &= \frac{2}{15} + 1 = \frac{17}{15} \end{aligned}$$

따라서

$$\begin{aligned} &\sum_{k=1}^{10} \left( k^2 \times P\left(\bar{X} = \frac{k}{5}\right) \right) \\ &= \sum_{k=0}^{10} \left( k^2 \times P\left(\bar{X} = \frac{k}{5}\right) \right) \\ &= 25 \sum_{k=0}^{10} \left\{ \left( \frac{k}{5} \right)^2 \times P\left(\bar{X} = \frac{k}{5}\right) \right\} \\ &= 25 \times E(\bar{X}^2) \\ &= 25 \times \frac{17}{15} = \frac{85}{3} = a \end{aligned}$$

이므로

$$6 \times a = 6 \times \frac{85}{3} = 170$$

정답 170