수학영역 가형 정답 및 풀이

01.③	02.①	03.⑤	04.①	05.④
06.⑤	07.③	08.②	09.④	10.②
11.④	12.④	13.③	14.②	15.⑤
16.④	17.④	18.③	19.①	20.⑤
21.②	22.30	23.7	24.15	25.60
26.48	27.22	28.40	29.24	
30.12				

1. **출제의도** : 조합의 수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$${}_9\mathrm{C}_7 = {}_9\mathrm{C}_2 = \frac{9\times 8}{2} = 36$$

정답 ③

2. **출제의도** : 로그함수의 도함수를 이용하여 미분계수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$f(x) = 7 + 3\ln x$에서

$$f'(x) = \frac{3}{x}$$

따라서

$$f'(3) = \frac{3}{3} = 1$$

정답 ①

3. **출제의도** : 지수함수의 극한을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}+e^{3x}-2}{2x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(e^{2x}-1)+(e^{3x}-1)}{2x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{2x}+\lim_{x\to 0}\frac{e^{3x}-1}{2x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{2x}+\lim_{x\to 0}\left(\frac{e^{3x}-1}{3x}\times\frac{3}{2}\right)$$

$$=1+1\times\frac{3}{2}=\frac{5}{2}$$

정답 ⑤

4. **출제의도** : 배반사건의 덧셈정리를 이해할 수 있는가?

정답풀이 :

$A\cup(A^C\cap B) = A\cup B$이고

$A\cap(A^C\cap B) = \varnothing$이다.

따라서

$\mathrm{P}(A\cup B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(A^C\cap B)$

이므로

$$\mathrm{P}(A) = \frac{3}{4} - \frac{2}{3} = \frac{1}{12}$$

정답 ①

5. **출제의도** : 정적분의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\int_0^{\ln 3} e^{x+3}\,dx = \left[\,e^{x+3}\right]_0^{\ln 3}$$

$$= e^{\ln 3+3} - e^3$$

$$= 3e^3 - e^3$$

$$= 2e^3$$

정답 ④

6. **출제의도** : 음함수의 미분법을 이용하여 접선의 기울기를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$x^2+xy+y^3=7$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$2x+y+x\frac{dy}{dx}+3y^2\frac{dy}{dx}=0$$

$$(x+3y^2)\frac{dy}{dx}=-(2x+y)$$

$$\therefore\ \frac{dy}{dx}=-\frac{2x+y}{x+3y^2}\ (\text{단, } x+3y^2\neq 0)$$

따라서 곡선 $x^2+xy+y^3=7$ 위의 점 $(2,1)$에서의 접선의 기울기는

$$-\frac{2\times 2+1}{2+3\times 1^2}=-1$$

정답 ⑤

7. 출제의도 : 자연수의 분할을 이용하여 경우의 수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

구하는 경우의 수는 12를 서로 다른 3개의 자연수로 분할하는 경우의 수와 같다.

$$\begin{aligned}12&=9+2+1\\&=8+3+1\\&=7+4+1=7+3+2\\&=6+5+1=6+4+2\\&=5+4+3\end{aligned}$$

따라서 구하는 경우의 수는 7이다.

정답 ③

8. 출제의도 : 포물선의 초점의 좌표를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

포물선 $y^2-4y-ax+4=0$, 즉 $(y-2)^2=ax$의 그래프는 포물선 $y^2=ax$의 그래프를 y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

이때 포물선 $y^2=ax$의 초점의 좌표가 $\left(\frac{a}{4},\ 0\right)$이므로 포물선 $(y-2)^2=ax$의 초점의 좌표는 $\left(\frac{a}{4},\ 2\right)$이다.

따라서 $\frac{a}{4}=3$, $2=b$, 즉 $a=12$, $b=2$이므로

$a+b=12+2=14$

정답 ②

9. 출제의도 : 주어진 조건을 이용하여 함숫값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

조건 (가)에서

$$\lim_{h\to 0}\frac{g(2+4h)-g(2)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\left\{\frac{g(2+4h)-g(2)}{4h}\times 4\right\}$$

$$=4g'(2)=8$$

따라서 $g'(2)=2$ 이다.

또한, 조건 (나)에서

$f'(g(2))\times g'(2)=10$

이므로

$f'(g(2))=5$

그런데, $f'(x)=2^x$이므로

$f'(g(2))=2^{g(2)}=5$

따라서 $g(2)=\log_2 5$

정답 ④

10. 출제의도 : 부분적분법을 이용하여 정적분의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

부분적분법에 의해

$$\int_1^e x^3 \ln x dx = \left[\frac{x^4}{4}\ln x\right]_1^e - \int_1^e \left(\frac{x^4}{4}\times\frac{1}{x}\right)dx$$

$$= \left(\frac{e^4}{4}\ln e - \frac{1}{4}\ln 1\right) - \left[\frac{x^4}{16}\right]_1^e$$

$$= \frac{e^4}{4} - 0 - \left(\frac{e^4}{16} - \frac{1}{16}\right)$$

$$= \frac{3e^4+1}{16}$$

정답 ②

11. 출제의도 : 곡선의 변곡점의 좌표를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$f(x)=xe^x$에서

$f'(x)=e^x+xe^x=(x+1)e^x$

$f''(x)=e^x+(x+1)e^x=(x+2)e^x$

$f''(x)=0$에서

$(x+2)e^x=0$, $x=-2$

$f''(-2)=0$이고

$x=-2$의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 변하므로 곡선 $y=f(x)$의 변곡점의 좌표는 $(-2,\ f(-2))$이다.

이때, $f(-2)=-2e^{-2}=-\dfrac{2}{e^2}$이므로

$a=-2,\ b=-\dfrac{2}{e^2}$

따라서

$$ab=(-2)\times\left(-\frac{2}{e^2}\right)=\frac{4}{e^2}$$

정답 ④

12. 출제의도 : 삼각함수의 미분법과 삼각함수의 덧셈정리를 이용하여 주어진 $\tan\alpha$의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$f'(x)=\cos(x+\alpha)-2\sin(x+\alpha)$

이므로

$$f'\left(\frac{\pi}{4}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)-2\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)=0$$

즉, $\cos\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)=2\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)$ 에서

$\tan\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)=\frac{1}{2}$ 이므로

$$\frac{\tan\frac{\pi}{4}+\tan\alpha}{1-\tan\frac{\pi}{4}\tan\alpha}=\frac{1}{2},\quad \frac{1+\tan\alpha}{1-\tan\alpha}=\frac{1}{2}$$

$2(1+\tan\alpha)=1-\tan\alpha$

$\tan\alpha=-\dfrac{1}{3}$

정답 ④

13. 출제의도 : 쌍곡선의 정의를 이해할 수 있는가?

정답풀이 :

$\overline{\mathrm{AF}}=k$라 하면 정사각형의 대각선의 길이는

$\overline{\mathrm{AF'}}=\sqrt{2}k$

한편, 주축의 길이가 2이므로 쌍곡선의 정의에 의해

$\overline{\mathrm{AF'}}-\overline{\mathrm{AF}}=2,\ \overline{\mathrm{AF'}}=\overline{\mathrm{AF}}+2$

즉, $\sqrt{2}k=k+2$이므로

$$k=\frac{2}{\sqrt{2}-1}=2(\sqrt{2}+1)$$

따라서 대각선의 길이는

$$\overline{\mathrm{AF'}}=\overline{\mathrm{AF}}+2$$
$$=k+2=2\sqrt{2}+2+2=4+2\sqrt{2}$$

정답 ③

<다른 풀이>

주어진 쌍곡선의 방정식을

$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ (a, b는 양의 상수)

라 하자.
쌍곡선의 주축의 길이가 2이므로
$2a=2$에서
$a=1$
따라서 $c=\sqrt{1+b^2}$이고
$\mathrm{F}(\sqrt{1+b^2},0)$, $\mathrm{F}'(-\sqrt{1+b^2},0)$
이므로
$\overline{\mathrm{FF}'}=2\sqrt{1+b^2}$
이때 사각형 ABF′F는 정사각형이므로
점 A의 좌표는
$(\sqrt{1+b^2},2\sqrt{1+b^2})$
이때 정사각형 ABF′F의 대각선의
길이는
$\overline{\mathrm{AF}'}=\sqrt{2}\times\overline{\mathrm{FF}'}=2\sqrt{2}\sqrt{1+b^2}$ ⋯ ㉠
이고, 쌍곡선의 정의에 의해
$\overline{\mathrm{AF}'}=\overline{\mathrm{AF}}+2=2\sqrt{1+b^2}+2$ ⋯ ㉡
이므로 ㉠, ㉡에서
$2\sqrt{2}\sqrt{1+b^2}=2\sqrt{1+b^2}+2$
$(\sqrt{2}-1)\sqrt{1+b^2}=1$
따라서
$$\sqrt{1+b^2}=\frac{1}{\sqrt{2}-1}=\sqrt{2}+1$$
이므로 정사각형 ABF′F의 대각선의
길이는 ㉡에서
$2(\sqrt{2}+1)+2=4+2\sqrt{2}$

14. 출제의도 : 주어진 조건을 만족하는 확률을 구할 수 있는가?

정답풀이 :
$a>b$, $a>c$를 만족하는 경우는 다음 표와 같다.

a	b	c
2	1	1
3	1, 2	1, 2
4	1, 2, 3	1, 2, 3
5	1, 2, 3, 4	1, 2, 3, 4
6	1, 2, 3, 4, 5	1, 2, 3, 4, 5

즉, 주어진 조건을 만족시키는 경우의 수는
$1\times1+2\times2+3\times3+4\times4+5\times5$
$=1+4+9+16+25$
$=55$
한편, 한 개의 주사위를 세 번 던질 때 나오는 경우의 수는
$6^3=216$
따라서 구하는 확률은
$$\frac{55}{216}$$

정답 ②

15. 출제의도 : 평면위의 운동에서의 속력의 최솟값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :
$\frac{dx}{dt}=\frac{1}{\sqrt{t+1}}$, $\frac{dy}{dt}=1-\frac{1}{t+1}$
이므로 시각 t에서의 점 P의 속력 $|v(t)|$는
$$|v(t)|=\sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{t+1}}\right)^2+\left(1-\frac{1}{t+1}\right)^2}$$
$$=\sqrt{\frac{1}{(t+1)^2}-\frac{1}{t+1}+1}$$
$$=\sqrt{\left(\frac{1}{t+1}-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}$$
따라서 $t=1$일 때 점 P의 속력의 최솟값은
$$\sqrt{\frac{3}{4}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

정답 ⑤

16. **출제의도** : 여러 가지 미분법을 이용하여 미분계수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$g(x)=\dfrac{f(x)\cos x}{e^x}$의 양변에 자연로그를 취하면

$\ln|g(x)|=\ln|f(x)|+\ln|\cos x|-\ln e^x$

$\quad=\ln|f(x)|+\ln|\cos x|-x$

위 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$\dfrac{g'(x)}{g(x)}=\dfrac{f'(x)}{f(x)}+\dfrac{-\sin x}{\cos x}-1$

위 등식에 $x=\pi$를 대입하면

$\dfrac{g'(\pi)}{g(\pi)}=\dfrac{f'(\pi)}{f(\pi)}+\dfrac{-\sin\pi}{\cos\pi}-1$

이고, $\dfrac{g'(\pi)}{g(\pi)}=e^\pi$이므로

$\dfrac{f'(\pi)}{f(\pi)}=e^\pi+1$

정답 ④

17. **출제의도** : 두 사건이 서로 독립일 조건을 이용하여 빈칸에 알맞은 식이나 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

A_k는 k번째 자리에 k 이하의 자연수 중 하나가 적힌 카드가 놓여 있고, k번째 자리를 제외한 7개의 자리에 나머지 7장의 카드가 놓여 있는 사건이므로

$\mathrm{P}(A_k)=\boxed{\dfrac{k\times 7!}{8!}}=\boxed{\dfrac{k}{8}}$

이다.

$A_m\cap A_n\,(m<n)$은 m번째 자리에 m 이하의 자연수 중 하나가 적힌 카드가 놓여 있고, n번째 자리에 n 이하의 자연수 중 m번째 자리에 놓인 카드에 적힌 수가 아닌 자연수가 적힌 카드가 놓여 있고, m번째와 n번째 자리를 제외한 6개의 자리에 나머지 6장의 카드가 놓여 있는 사건이므로

$\mathrm{P}(A_m\cap A_n)=\boxed{\dfrac{m\times(n-1)\times 6!}{8!}}$

$\quad=\boxed{\dfrac{m(n-1)}{56}}$

이다.

한편, 두 사건 A_m과 A_n이 서로 독립이기 위해서는

$\mathrm{P}(A_m\cap A_n)=\mathrm{P}(A_m)\mathrm{P}(A_n)$

을 만족시켜야 한다.

즉, $\dfrac{m(n-1)}{56}=\dfrac{m}{8}\times\dfrac{n}{8}$

이므로

$8(n-1)=7n,\ n=8$

이때, $m=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 7$

따라서 두 사건 A_m과 A_n이 서로 독립이 되도록 하는 $m,\ n$의 모든 순서쌍 $(m,\ n)$은

$(1,\ 8),\ (2,\ 8),\ (3,\ 8),\ \cdots,\ (7,\ 8)$

이고, 그 개수는 $\boxed{7}$이다.

이상에서 (가)에 알맞은 식은 $\dfrac{k}{8}$이므로

$p=\dfrac{4}{8}=\dfrac{1}{2}$

(나)에 알맞은 식은 $\dfrac{m(n-1)}{56}$이므로

$q=\dfrac{3(5-1)}{56}=\dfrac{3}{14}$

(다)에 알맞은 수는 7이므로

$r=7$

따라서

$p\times q\times r=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{3}{14}\times 7=\dfrac{3}{4}$

정답 ④

18. 출제의도 : 벡터의 합을 이해하고 벡터의 합의 크기가 최댓값을 가질 조건을 구할 수 있는가?

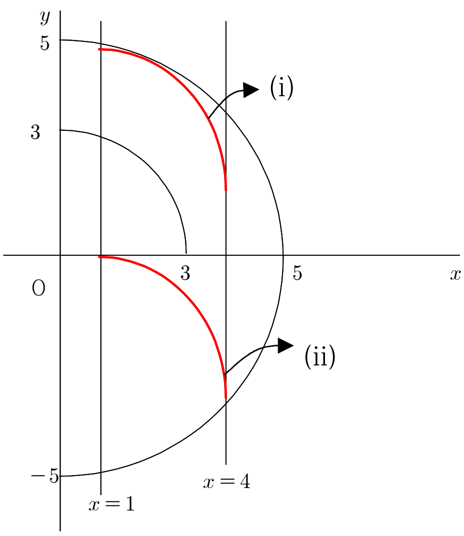
정답풀이 :

$|\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}| \le 5$이어야 하므로 $\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{QR}$를 만족시키는 점을 R라 할 때,

$|\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}|=|\overrightarrow{QR}+\overrightarrow{OQ}|=|\overrightarrow{OR}| \le 5$

을 만족시켜야 한다.

이때, 점 P는 직선 $x=1$을 움직이므로 점 R의 좌표 중 x좌표가 가장 큰 점은 직선 $x=4$를 움직인다. 그런데 점 Q는 호 AB위를 움직이므로 최댓값이 5가 되는 경우는 그림과 같이 두 가지 경우이다.



(i) 두 원

$x^2+y^2=25$, $(x-1)^2+(y-a)^2=9$

이 서로 내접하는 경우이므로

$\sqrt{1^2+a^2}=5-3$, $\sqrt{a^2+1}=2$

$a^2=3$

이때 $a>0$이므로 $a=\sqrt{3}$

(ii) 원 $x^2+y^2=25$에서 $x=4$일 때 $y=-3$ 이므로 $a=-3$ 이다.

(i), (ii) 에 의하여 모든 실수 a의 값의 곱은 $-3\sqrt{3}$ 이다.

정답 ③

19. 출제의도 : 중복조합을 이용하여 순서쌍의 개수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$x_{n+1}-x_n=a_n$ $(n=1,2,3)$이라 하면 조건 (가)에서 $a_n \ge 2$이고

$(x_4-x_3)+(x_3-x_2)+(x_2-x_1)=x_4-x_1$

이므로

$a_1+a_2+a_3=x_4-x_1$

이때

$x_1+a_1+a_2+a_3=x_4 \le 12$

이므로

$12-x_4=a_4$라 하면 $a_4 \ge 0$이고

$x_1+a_1+a_2+a_3+a_4=12$ $\cdots$ ㉠

이때 $a_n{}'=a_n-2$ $(n=1,2,3)$이라 하면

$x_1+a_1{}'+a_2{}'+a_3{}'+a_4=6$ $\cdots$ ㉡

이때

$x_1 \ge 0$, $a_1{}' \ge 0$, $a_2{}' \ge 0$, $a_3{}' \ge 0$, $a_4 \ge 0$

이므로 ㉡을 만족시키는 순서쌍

$(x_1,\ a_1{}',\ a_2{}',\ a_3{}',\ a_4)$의 개수는

${}_5\mathrm{H}_6={}_{5+6-1}\mathrm{C}_6={}_{10}\mathrm{C}_6={}_{10}\mathrm{C}_4$

$=\dfrac{10\times9\times8\times7}{4\times3\times2\times1}=210$

정답 ①

<다른 풀이>

$x_{n+1}-x_n=a_n$ $(n=1,2,3)$이라 하면 조건 (가)에서 $a_n \ge 2$이고

$(x_4-x_3)+(x_3-x_2)+(x_2-x_1)=x_4-x_1$

이므로

$a_1+a_2+a_3=x_4-x_1 \cdots$ ㉠

이때 $a_n{}'=a_n-2$ $(n=1,2,3)$이라 하면

$a_n{}' \geq 0$이고

$a_1{}'+a_2{}'+a_3{}'=x_4-x_1-6 \cdots$ ㉡

한편, 등식

$a_1{}'+a_2{}'+a_3{}'=k$ $(k \geq 0)$

을 만족시키는 순서쌍 $(a_1{}',a_2{}',a_3{}')$의

개수는

${}_3\mathrm{H}_k={}_{3+k-1}\mathrm{C}_k={}_{k+2}\mathrm{C}_k$

(i) $x_4=12$일 때

㉡에서

$a_1{}'+a_2{}'+a_3{}'=6-x_1$

이때 $0 \leq x_1 \leq 6$이므로 파스칼의

삼각형의 성질에 의해 순서쌍

$(a_1{}',a_2{}',a_3{}')$의 개수는

$$\sum_{k=0}^{6} {}_3\mathrm{H}_k=\sum_{k=0}^{6} {}_{k+2}\mathrm{C}_k={}_9\mathrm{C}_6$$

(ii) $x_4=11$일 때

㉡에서

$a_1{}'+a_2{}'+a_3{}'=5-x_1$

이때 $0 \leq x_1 \leq 5$이므로 파스칼의

삼각형의 성질에 의해 순서쌍

$(a_1{}',a_2{}',a_3{}')$의 개수는

$$\sum_{k=0}^{5} {}_3\mathrm{H}_k=\sum_{k=0}^{5} {}_{k+2}\mathrm{C}_k={}_8\mathrm{C}_5$$

이와 같은 방법으로

$x_4=7$일 때

㉡에서

$a_1{}'+a_2{}'+a_3{}'=1-x_1$

이때 $0 \leq x_1 \leq 1$이므로 파스칼의

삼각형의 성질에 의해 순서쌍

$(a_1{}',a_2{}',a_3{}')$의 개수는

$$\sum_{k=0}^{1} {}_3\mathrm{H}_k=\sum_{k=0}^{1} {}_{k+2}\mathrm{C}_k={}_4\mathrm{C}_1$$

또, $x_4=6$일 때

㉡에서

$a_1{}'+a_2{}'+a_3{}'=-x_1$, 즉 $a_1{}'+a_2{}'+a_3{}'=0$

이므로 순서쌍 $(a_1{}',a_2{}',a_3{}')$의 개수는

${}_3\mathrm{H}_0={}_2\mathrm{C}_0={}_3\mathrm{C}_0$

이상에서 구하는 순서쌍의 개수는

${}_9\mathrm{C}_6+{}_8\mathrm{C}_5+{}_7\mathrm{C}_4+\cdots+{}_4\mathrm{C}_1+{}_3\mathrm{C}_0$

$={}_{10}\mathrm{C}_6={}_{10}\mathrm{C}_4$

$$=\frac{10\times9\times8\times7}{4\times3\times2\times1}=210$$

20. 출제의도 : 정적분의 여러 가지 성질들을 이용하여 명제의 참, 거짓을 판단 할 수 있는가?

정답풀이 :

ㄱ. 조건 (나)에서

$$\ln f(x)+2x\int_0^x f(t)dt-2\int_0^x tf(t)dt=0$$

양변을 x에 대하여 미분하면

$$\frac{f'(x)}{f(x)}+2\int_0^x f(t)dt+2xf(x)-2xf(x)=0$$

$$\frac{f'(x)}{f(x)}+2\int_0^x f(t)dt=0$$

$$f'(x)=-2f(x)\int_0^x f(t)dt \cdots ㉠$$

이때 $x>0$이고 $f(x)>0$ 이므로

$$\int_0^x f(t)dt>0$$

즉, $f'(x)<0$ 이므로 함수 $f(x)$는 감소한다. (참)

ㄴ. ㉠에 $x=0$을 대입하면

$f'(0)=0$

또한, $x<0$일 때 $f(x)>0$ 이고

$\int_0^x f(t)dt<0$ 이므로

$f'(x)>0$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극대이면서 최댓값을 갖는다. 이때 조건 (나)에 $x=0$을 대입하면

$\ln f(0)=0,\ f(0)=e^0=1$

즉, 함수 $f(x)$의 최댓값은 1이다. (참)

ㄷ. ㉠에서

$f'(x)=-2f(x)\int_0^x f(t)dt$

$\quad =-2f(x)F(x)$

이고 $F(x)=\int_0^x f(t)dt$ 에서

$F'(x)=f(x)$

이므로

$f'(x)=-2F'(x)F(x)$

$f'(x)+2F'(x)F(x)=0$

그런데,

$\frac{d}{dx}[f(x)+\{F(x)\}^2]=f'(x)+2F(x)F'(x)$

이므로

$f(x)+\{F(x)RIGHT=C$ (C는 상수)

이때 $x=0$을 대입하면

$f(0)+\{F(0)RIGHT=1$

이므로 $C=1$

즉, $f(1)+\{F(1)RIGHT=1$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ 이다.

정답 ⑤

21. 출제의도 : 곡선의 접선 및 합성함수의 미분법을 이용하여 주어진 식의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

함수 $f(x)=\frac{\ln x}{x}$에서

$f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$

$f'(x)=t$에서

$\frac{1-\ln x}{x^2}=t$

이때, $g(t)=x$이므로

$g\left(\frac{1-\ln x}{x^2}\right)=x$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

한편, 원점에서 곡선 $y=f(x)$에 그은 접선을 l이라 하고, 접선 l과 곡선 $y=f(x)$의 접점의 좌표를 $(x_1,\ f(x_1))$이라 하면 접선 l의 방정식은

$y-f(x_1)=f'(x_1)(x-x_1)$

즉,

$y-\frac{\ln x_1}{x_1}=\frac{1-\ln x_1}{(x_1)^2}(x-x_1)$

이 직선이 원점을 지나므로

$0-\frac{\ln x_1}{x_1}=\frac{1-\ln x_1}{(x_1)^2}(0-x_1)$

$\ln x_1=\frac{1}{2}$

$x_1=\sqrt{e}$

따라서

$a=f'(\sqrt{e})=\frac{1-\ln\sqrt{e}}{(\sqrt{e})^2}=\frac{1}{2e}$

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$g'\left(\frac{1-\ln x}{x^2}\right)\times\frac{2\ln x-3}{x^3}=1$

이므로

$g'\left(\frac{1-\ln x}{x^2}\right)=\frac{x^3}{2\ln x-3}$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡

㉡의 양변에 $x=\sqrt{e}$를 대입하면

$$g'\left(\frac{1}{2e}\right)=-\frac{e\sqrt{e}}{2}$$

즉,

$$g'(a)=g'\left(\frac{1}{2e}\right)=-\frac{e\sqrt{e}}{2}$$

따라서

$$a\times g'(a)=\frac{1}{2e}\times\left(-\frac{e\sqrt{e}}{2}\right)$$
$$=-\frac{\sqrt{e}}{4}$$

정답 ②

22. **출제의도** : 벡터의 곱셈을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$10\vec{a}=10(2,\ 1)=(20,\ 10)$

이므로 $10\vec{a}$의 모든 성분의 합은

$20+10=30$

정답 30

23. **출제의도** : 삼각함수 사이의 관계를 이용하여 주어진 식의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$\cos\theta=\frac{1}{7}$이므로

$$\csc\theta\times\tan\theta=\frac{1}{\sin\theta}\times\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$
$$=\frac{1}{\cos\theta}$$
$$=7$$

정답 7

24. **출제의도** : 그래프를 이용하여 로그가 포함된 부등식의 해를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$\log_3 f(x)+\log_{\frac{1}{3}}(x-1)\le 0$ 에서

$\log_3 f(x)-\log_3(x-1)\le 0$

$\log_3 f(x)\le\log_3(x-1)$

따라서

$f(x)\le x-1,\ f(x)>0,\ x-1>0\cdots$㉠

이므로 ㉠을 만족시키는 자연수 x는

4, 5, 6

이고 그 합은

$4+5+6=15$

정답 15

25. **출제의도** : 조합을 이용하여 함수의 개수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

조건 (나)를 만족시키는 a의 값이 될 수 있는 X의 세 원소를 $a_1,\ a_2,\ a_3$이라 하고, 나머지 두 원소를 $b_1,\ b_2$라 하자.

X의 세 원소 $a_1,\ a_2,\ a_3$을 택하는 경우의 수는

$${}_5C_3=\frac{5\times4}{2\times1}=10$$

$b_1,\ b_2$ 중에서 한 개를 택하여 조건 (가)를 만족시키도록(예를 들어, b_1을 택하면 $f(b_1)=b_2$이어야 한다.) 대응시키는 경우의 수는

${}_2C_1\times1=2$

남아있는 나머지 1개의 원소를 $a_1,\ a_2,\ a_3$ 중에서 1개에 대응시키는 경우의 수는

${}_3C_1=3$

따라서 구하는 함수의 개수는

$10\times2\times3=60$

정답 60

26. 출제의도 : 벡터의 크기를 이용하여 점 P가 나타내는 도형의 방정식과 방향벡터가 주어진 직선의 방정식을 구한 후, 두 직선이 이루는 예각의 크기를 이용하여 문제를 해결할 수 있는가?

정답풀이 :

좌표평면에서 점 P의 좌표를 $(x,\ y)$라 하자.

$|\overrightarrow{OP}|=\sqrt{x^2+y^2}=10$에서

$x^2+y^2=100$

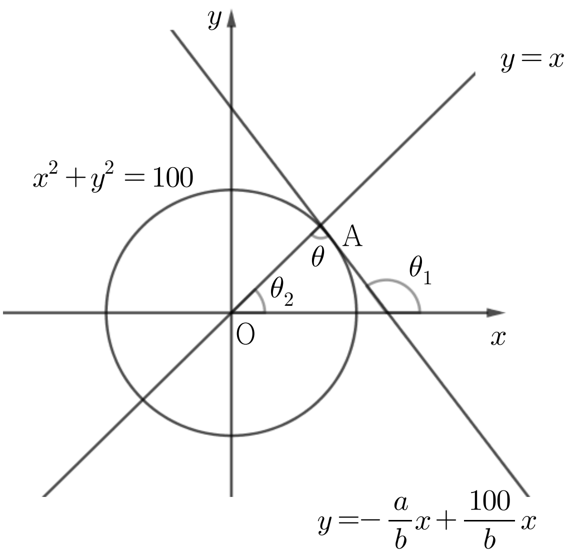
점 $A(a,\ b)$가 원 $x^2+y^2=100$ 위의 점이므로 $a^2+b^2=100$ …… ㉠

원 $x^2+y^2=100$ 위의 점 $A(a,\ b)$에서의 접선의 방정식은 $ax+by=100$

즉, $y=-\dfrac{a}{b}x+\dfrac{100}{b}$

원점을 지나고 방향벡터가 $(1,\ 1)$인 직선의 방정식은

$\dfrac{x}{1}=\dfrac{y}{1}$ 즉, $y=x$



두 직선 $y=-\dfrac{a}{b}x+\dfrac{100}{b}$, $y=x$가 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 각각 θ_1, θ_2라 하면

$\tan\theta_1=-\dfrac{a}{b}$, $\tan\theta_2=1$

이고

$\theta=\theta_1-\theta_2$

이다.

한편, $\cos\theta=\dfrac{\sqrt{2}}{10}$이므로

$$\begin{aligned}\tan^2\theta&=\sec^2\theta-1\\&=\frac{1}{\cos^2\theta}-1\\&=\left(\frac{10}{\sqrt{2}}\right)^2-1\\&=49\end{aligned}$$

$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$에서 $\tan\theta>0$이므로

$\tan\theta=7$

이때,

$$\begin{aligned}\tan\theta&=\tan(\theta_1-\theta_2)\\&=\frac{\tan\theta_1-\tan\theta_2}{1+\tan\theta_1\tan\theta_2}\\&=\frac{\left(-\frac{a}{b}\right)-1}{1+\left(-\frac{a}{b}\right)\times1}\\&=\frac{a+b}{a-b}\end{aligned}$$

이므로

$\dfrac{a+b}{a-b}=7$

$b=\dfrac{3}{4}a$ …… ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$a^2+\left(\dfrac{3}{4}a\right)^2=100$

$a^2 = 64$

$a > 0$이므로

$a = 8$

$a = 8$을 ㉡에 대입하면

$b = \frac{3}{4} \times 8 = 6$

따라서

$ab = 8 \times 6 = 48$

정답 48

27. 출제의도 : 경우의 수를 구하여 확률을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$a_k (1 \le k \le 6)$를 순서쌍

$(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6)$

으로 나타내면 순서쌍의 개수는

$\frac{6!}{2!2!2!} = 90$

이때 $m > n$이기 위해서는

$a_1 > a_4$ 또는 $a_1 = a_4$, $a_2 > a_5$

이어야 한다.

(i) $a_1 > a_4$인 순서쌍은

$(2, a_2, a_3, 1, a_5, a_6)$ 또는 $(3, a_2, a_3, 1, a_5, a_6)$ 또는 $(3, a_2, a_3, 2, a_5, a_6)$ 이므로 그 개수는

$3 \times \frac{4!}{2!} = 36$

(ii) $a_1 = a_4$, $a_2 > a_5$인 순서쌍은

$(1, 3, a_3, 1, 2, a_6)$ 또는 $(2, 3, a_3, 2, 1, a_6)$ 또는 $(3, 2, a_3, 3, 1, a_6)$ 이므로 그 개수는

$3 \times 2! = 6$

(i), (ii)에 의하여 구하는 확률은

$\frac{36+6}{90} = \frac{7}{15}$

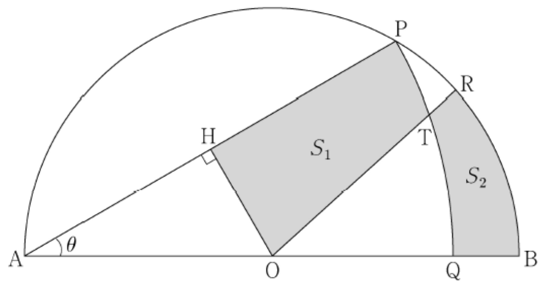
따라서 $p = 15$, $q = 7$이므로

$p + q = 22$

정답 22

28. 출제의도 : 도형의 넓이를 삼각함수로 나타내고, 극한값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :



삼각형 ABP에서

$\angle \mathrm{APB} = \frac{\pi}{2}$

이므로

$\overline{\mathrm{AP}} = 2\cos\theta$

직각삼각형 AOH에서

$\overline{\mathrm{AH}} = \overline{\mathrm{OA}}\cos\theta = \cos\theta$,

$\overline{\mathrm{OH}} = \sin\theta$

한편, 부채꼴 PAQ의 넓이를 M_1이라 하면

$$M_1 = \frac{1}{2} \times \overline{\mathrm{AP}}^2 \times \theta$$
$$= \frac{1}{2} \times (2\cos\theta)^2 \times \theta$$
$$= 2\theta\cos^2\theta$$

삼각형 AOH의 넓이를 M_2라 하면

$$M_2 = \frac{1}{2} \times \overline{\mathrm{AH}} \times \overline{\mathrm{OH}}$$
$$= \frac{1}{2}\cos\theta\sin\theta$$

부채꼴 POB에서

$\angle \mathrm{POB} = 2\angle \mathrm{PAB} = 2\theta$

이고,

$\overset{\frown}{\mathrm{PR}} : \overset{\frown}{\mathrm{RB}} = 3:7$

이므로

$\angle \mathrm{ROB} = \frac{7}{10} \times 2\theta = \frac{7}{5}\theta$

부채꼴 ROB의 넓이를 M_3이라 하면

$$M_3 = \frac{1}{2} \times \overline{\mathrm{OB}}^2 \times \frac{7}{5}\theta$$
$$= \frac{1}{2} \times 1^2 \times \frac{7}{5}\theta$$
$$= \frac{7}{10}\theta$$

이때,

$$S_1 - S_2 = M_1 - M_2 - M_3$$
$$= 2\theta\cos^2\theta - \frac{1}{2}\cos\theta\sin\theta - \frac{7}{10}\theta$$

이므로

$$\lim_{\theta \to 0+} \frac{S_1 - S_2}{\overline{\mathrm{OH}}}$$
$$= \lim_{\theta \to 0+} \frac{2\theta\cos^2\theta - \frac{1}{2}\cos\theta\sin\theta - \frac{7}{10}\theta}{\sin\theta}$$
$$= 2\lim_{\theta \to 0+} \frac{\theta}{\sin\theta} \times \lim_{\theta \to 0+} \cos^2\theta - \frac{1}{2}\lim_{\theta \to 0+} \cos\theta - \frac{7}{10}\lim_{\theta \to 0+} \frac{\theta}{\sin\theta}$$
$$= 2 - \frac{1}{2} - \frac{7}{10}$$
$$= \frac{4}{5}$$

따라서 $a = \frac{4}{5}$이므로

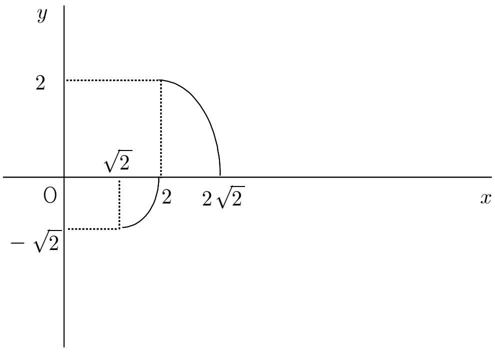
$50a = 50 \times \frac{4}{5} = 40$

정답 40

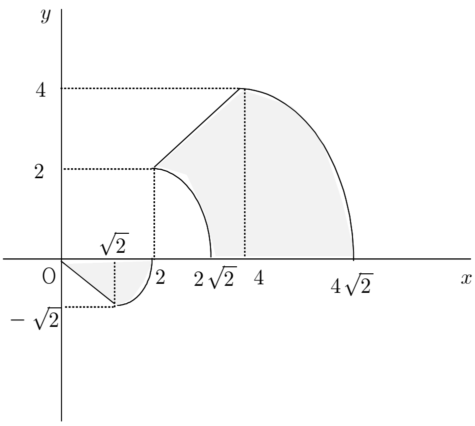
29. **출제의도** : 벡터의 연산에서 종점의 위치를 이해하고 벡터의 내적의 최댓값과 최솟값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

좌표평면에서 곡선 C와 점 Q가 나타내는 곡선은 그림과 같다.



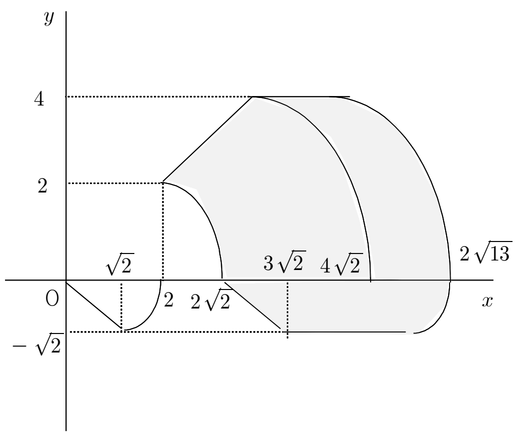
이때 $\overrightarrow{\mathrm{OP}} + \overrightarrow{\mathrm{OX}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}}$라 하면 점 A와 $\overrightarrow{\mathrm{OY}}$가 나타내는 점 Y는 그림의 색칠된 부분에 존재한다.



따라서

$\overrightarrow{\mathrm{OZ}} = \overrightarrow{\mathrm{OP}} + \overrightarrow{\mathrm{OX}} + \overrightarrow{\mathrm{OY}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OY}}$

를 만족시키는 점 Z가 나타내는 영역 D는 그림의 색칠된 부분이다.



따라서 영역 D에 속하는 점 중에서 y축과의 거리가 최소인 점 $\mathrm{R}(2,2)$ 이므로 $\overrightarrow{\mathrm{OR}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OZ}}$의 최솟값 m은 점 Z가 두 점 $(2\sqrt{2},0)$, $(3\sqrt{2},-\sqrt{2})$을 잇는 선분 위의 점일 때이므로

$m = 2\times 2\sqrt{2} = 4\sqrt{2}$

$\overrightarrow{\mathrm{OR}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OZ}}$의 최댓값 M은 점 $\mathrm{Z}(6,4)$일 때이므로

$M = 2\times 6 + 2\times 4 = 20$

따라서

$M + m = 20 + 4\sqrt{2}$

이므로 $a = 20$, $b = 4$

즉, $a + b = 24$

정답 24

30. 출제의도 : 함수의 그래프와 정적분의 성질을 이용하여 정적분의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$f(x) = a\sin^3 x + b\sin x$ 에서

$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{4}a + \frac{\sqrt{2}}{2}b = 3\sqrt{2}$ 이므로

$a + 2b = 12 \cdots$ ㉠

$f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{8}a + \frac{\sqrt{3}}{2}b = 5\sqrt{3}$ 이므로

$3a + 4b = 40 \cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하면

$a = 16$, $b = -2$

따라서 $f(x) = 16\sin^3 x - 2\sin x$이므로

함수 $f(x)$의 주기는 2π이고,

함수 $y = f(x)$의 그래프는 직선 $x = n\pi + \frac{\pi}{2}$ (n은 정수)에 대하여 대칭이다.

이때

$$f'(x) = 48\sin^2 x\cos x - 2\cos x$$
$$= 2\cos x(24\sin^2 x - 1) = 0$$

이므로 $f'(x) = 0$에서

$\cos x = 0$ 또는 $\sin x = \pm\frac{\sqrt{6}}{12}$

따라서 함수 $f(x)$의 극댓값은 14이거나 1보다 작으므로 함수 $y = f(x)$의 그래프에서 $1 < t < 14$인 실수 t에 대하여

$1 < f(x_n) < 14$이고,

$x_n = (n-1)\pi + (-1)^{n-1}x_1$

(i) n이 홀수일 때

$f'(x_n) = f'(x_1)$이므로

$$c_n = \int_{3\sqrt{2}}^{5\sqrt{3}} \frac{t}{f'(x_n)}dt = \int_{3\sqrt{2}}^{5\sqrt{3}} \frac{t}{f'(x_1)}dt$$

(ii) n이 짝수일 때

$f'(x_n) = -f'(x_1)$이므로

$$c_n = \int_{3\sqrt{2}}^{5\sqrt{3}} \frac{t}{f'(x_n)}dt = -\int_{3\sqrt{2}}^{5\sqrt{3}} \frac{t}{f'(x_1)}dt$$

(i), (ii)에서

$c_1 + c_2 = c_3 + c_4 = \cdots = c_{99} + c_{100} = 0$이므로

$$\sum_{n=1}^{101} c_n = c_{101} = c_1$$

이제 $c_1 = \int_{3\sqrt{2}}^{5\sqrt{3}} \frac{t}{f'(x_1)}dt$의 값을 구하자.

$\frac{\pi}{4} \le x \le \frac{\pi}{3}$에서 함수 $g(x)$를

$g(x)=f(x)$로 정의하면 함수 $y=g(x)$는 일대일대응이므로 $h=g^{-1}$라 하자.

$f(x_1)=t$에서 $g(x_1)=t$이므로

$h(t)=x_1$

따라서 역함수의 미분법에 의해

$$\frac{1}{f'(x_1)}=\frac{1}{g'(x_1)}=h'(t)$$

이므로

$$c_1=\int_{3\sqrt{2}}^{5\sqrt{3}}\frac{t}{f'(x_1)}dt=\int_{3\sqrt{2}}^{5\sqrt{3}}th'(t)dt$$

이때 $h(t)=y$라 하면 $t=g(y)=f(y)$이고,

$t=3\sqrt{2}$일 때 $y=\frac{\pi}{4}$ ($f\left(\frac{\pi}{4}\right)=3\sqrt{2}$이므로)

$t=5\sqrt{3}$일 때 $y=\frac{\pi}{3}$ ($f\left(\frac{\pi}{3}\right)=5\sqrt{3}$이므로)

한편, $h(t)=y$에서 $\frac{dy}{dt}=h'(t)$이다.

따라서

$$\int_{3\sqrt{2}}^{5\sqrt{3}}th'(t)dt=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}f(y)dy$$

$$=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}(16\sin^3 x-2\sin x)dx$$

$$=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\{16\sin x(1-\cos^2 x)-2\sin x\}dx$$

$$=14\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\sin x dx-16\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\sin x\cos^2 x dx$$

$$=14[-\cos x]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}-16\left[-\frac{1}{3}\cos^3 x\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}$$

$$=14\left(-\cos\frac{\pi}{3}+\cos\frac{\pi}{4}\right)$$

$$+\frac{16}{3}\left(\cos^3\frac{\pi}{3}-\cos^3\frac{\pi}{4}\right)$$

$$=14\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+\frac{16}{3}\left(\frac{1}{8}-\frac{\sqrt{2}}{4}\right)$$

$$=-7+7\sqrt{2}+\frac{2}{3}-\frac{4\sqrt{2}}{3}$$

$$=-\frac{19}{3}+\frac{17\sqrt{2}}{3}$$

이므로

$$c_1=-\frac{19}{3}+\frac{17\sqrt{2}}{3}$$

따라서

$$\sum_{n=1}^{101}c_n=c_{101}=c_1=-\frac{19}{3}+\frac{17\sqrt{2}}{3}$$

따라서 $p=-\frac{19}{3}$, $q=\frac{17}{3}$이므로

$$q-p=\frac{17+19}{3}=12$$

정답 12