

(홀수형)

2008학년도 대학수학능력시험 (수리영역-나형) 정답 및 해설

1.

$$\begin{aligned} 8^{\frac{2}{3}} + \log_2 8 \\ &= (2^3)^{\frac{2}{3}} + \log_2 2^3 \\ &= 2^2 + 3 \\ &= 7 \end{aligned}$$

답 ③

2.

$$\begin{aligned} X &= 2B - A \\ &= \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

답 ①

3.

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt{4n^2 + 1} + \sqrt{n^2 + 2}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{4 + \frac{1}{n^2}} + \sqrt{1 + \frac{2}{n^2}}} \\ &= \frac{1}{2 + 1} \\ &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

답 ③

4.

$$\begin{aligned} a &= \sqrt{2} \text{에서 } a^2 = 2 \\ b^3 &= \sqrt{3} \text{에서} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b^2 &= (b^3)^{\frac{2}{3}} \\ &= (\sqrt{3})^{\frac{2}{3}} \\ &= \left(3^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{2}{3}} \\ &= 3^{\frac{1}{3}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore (ab)^2 &= a^2 b^2 \\ &= 2 \cdot 3^{\frac{1}{3}} \end{aligned}$$

답 ①

5.

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} 2n & -7 \\ -1 & n \end{pmatrix} \text{에서} \\ A^{-1} &= \frac{1}{2n^2 - 7} \begin{pmatrix} n & 7 \\ 1 & 2n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

이 때, A^{-1} 의 $(2, 1)$ 의 성분이 $\frac{1}{2n^2 - 7}$

이므로 A^{-1} 의 모든 성분이 자연수가 되려면

$$2n^2 - 7 = 1$$

$$2n^2 = 8, \quad n^2 = 4$$

$$\therefore n = 2 \quad (\because n \text{은 자연수})$$

답 ②

6.

$$\begin{aligned} P(A^c) &= 1 - P(A) \\ &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

이므로

$$P(A) = \frac{2}{3}$$

두 사건 A, B 가 서로 독립이므로

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

$$= \frac{2}{3} \times \frac{1}{3}$$

$$= \frac{2}{9}$$

답 ④

7.

$\left(2x + \frac{1}{2x}\right)^7$ 의 전개식에서 일반항은

$${}_7C_r (2x)^{7-r} \left(\frac{1}{2x}\right)^r = {}_7C_r 2^{7-2r} x^{7-2r}$$

$7-2r=1$ 에서 $r=3$ 이므로

x 의 계수는

$${}_7C_3 \cdot 2^1 = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3 \cdot 2 \cdot 1} \cdot 2$$

$$= 70$$

답 ⑤

8.

$6x^2 - 5x + 1 = 0$ 에서

$$(2x-1)(3x-1) = 0$$

$$\therefore x = \frac{1}{2}, \frac{1}{3}$$

$P(X \leq 1) < P(X \leq 2)$ 이므로

$$P(X \leq 1) = \frac{1}{3}$$

$$P(X \leq 2) = \frac{1}{2}$$

$$\therefore P(1 < X \leq 2) = P(X \leq 2) - P(X \leq 1)$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{3}$$

$$= \frac{1}{6}$$

답 ②

9.

1부에서 3팀이 독창, 중창, 합창 순으로 공연하는 순서를 정하는 방법의 수는

$${}_2C_1 \times {}_2C_1 \times {}_3C_1 = 12 \text{ (가지)}$$

2부에서 남아있는 4팀이 독창, 중창, 합창, 합창 순으로 공연하는 순서를 정하는 방법의 수는

$${}_1C_1 \times {}_1C_1 \times {}_2P_2 = 2 \text{ (가지)}$$

따라서, 구하는 방법의 수는

$$12 \times 2 = 24 \text{ (가지)}$$

답 ④

10.

$f(x)$ 의 그래프와 그 역함수의 그래프의 교점은 $f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=x$ 의 교점과 같고, 두 교점의 x 좌표가 1, 3이므로 교점의 좌표는 (1, 1), (3, 3)이다.

$f(1) = 1$ 에서 $a^{1-m} = 1$ 이므로

$$1 - m = 0$$

$$\therefore m = 1$$

$f(3) = 3$ 에서 $a^{3-m} = 3$ 이므로

$$a^2 = 3$$

$a > 0$ 이므로 $a = \sqrt{3}$

$$\therefore a + m = 1 + \sqrt{3}$$

답 ③

11.

$$(1^2 + 1) \cdot 1! + (2^2 + 1) \cdot 2! + \dots$$

(홀수형)

2008학년도 대학수학능력시험 (수리영역-나형) 정답 및 해설

$$\begin{aligned}
 &+ (k^2 + 1) \cdot k! + \{ (k+1)^2 + 1 \} \cdot (k+1)! \\
 &= [k \cdot (k+1)!] + \{ (k+1)^2 + 1 \} \cdot (k+1)! \\
 &= \{ k + (k+1)^2 + 1 \} \cdot (k+1)! \\
 &= ([k^2 + 3k^2 + 2]) \cdot (k+1)! \\
 &= (k+1)(k+2)(k+1)!
 \end{aligned}$$

$$= (k+1) \cdot [(k+2)!]$$

답 ②

12.

2장의 카드에 적혀있는 두 수의 합이 홀수인 사건을 E 라 하고, 주머니 A, B에서 꺼낸 카드에 적혀있는 수가 짝수인 사건을 각각 A, B 라 하면 구하는 확률은 $P(A|E)$ 이다.

$$\begin{aligned}
 \therefore P(A|E) &= \frac{P(A \cap E)}{P(E)} \\
 &= \frac{P(A \cap E)}{P(A \cap E) + P(B \cap E)} \\
 &= \frac{\frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5}}{\frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} + \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{5}} \\
 &= \frac{4}{13}
 \end{aligned}$$

답 ②

13.

신입사원의 키를 확률변수 X 라고 하면 X 는 정규분포 $N(m, 10^2)$ 을 따른다.

$$\begin{aligned}
 P(X \geq 177) &= P\left(Z \geq \frac{177-m}{10}\right) \\
 &= 0.242 \\
 P\left(0 \leq Z \leq \frac{177-m}{10}\right) &= 0.5 - 0.242 \\
 &= 0.258
 \end{aligned}$$

이므로

$$\frac{177-m}{10} = 0.7 \text{ 에서}$$

$$m = 170$$

$$\therefore P(X \geq 180) = P\left(Z \geq \frac{180-170}{10}\right)$$

$$= P(Z \geq 1)$$

$$= 0.5 - P(0 \leq Z \leq 1)$$

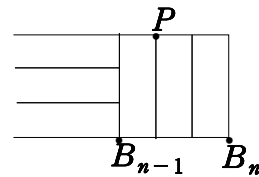
$$= 0.5 - 0.3413$$

$$= 0.1587$$

답 ①

14.

(i) n 이 짝수일 때,



B_n 에 이르는 최단경로는

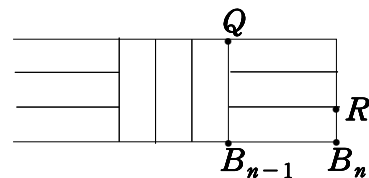
$$A \rightarrow B_{n-1} \rightarrow B_n$$

$$\text{또는 } A \rightarrow P \rightarrow B_n$$

$$\therefore a_n = a_{n-1} \times 1 + 1 \times \frac{3!}{2!1!}$$

$$= a_{n-1} + 3$$

(ii) n 이 홀수일 때,



B_n 에 이르는 최단경로는

$$A \rightarrow B_{n-1} \rightarrow B_n$$

$$\text{또는 } A \rightarrow Q \rightarrow R \rightarrow B_n$$

$$\therefore a_n = a_{n-1} \times 1 + 1 \times \frac{3!}{2!1!} \times 1$$

$$= a_{n-1} + 3$$

(i), (ii)에서

$$a_n = a_{n-1} + 3 \quad (n = 2, 3, 4, \dots)$$

이므로 수열 $\{a_n\}$ 은 공차가 3인 등차수열이다.

$$a_1 = \frac{4!}{3!1!} = 4 \text{ 이므로}$$

$$a_3 = 4 + 2 \times 3 = 10,$$

$$a_7 = 4 + 6 \times 3 = 22$$

$$\therefore a_3 + a_7 = 32$$

답 ④

15.

ㄱ. $a = b$ 이면

$$AB = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$$

$$= aE \quad (E \text{ 는 단위행렬})$$

이므로

$$A \cdot \left(\frac{1}{a} B\right) = E$$

$$\therefore A^{-1} = \frac{1}{a} B \quad (\text{참})$$

ㄴ. ㄱ에서 $A^{-1} = \frac{1}{a} B$ 이므로

$$A \cdot \frac{1}{a} B = \frac{1}{a} B \cdot A \\ = E$$

$$\therefore AB = BA \quad (\text{참})$$

ㄷ. $AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} B = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ 이므로

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a & 0 \\ -a & b \end{pmatrix}$$

$$BA = \begin{pmatrix} a & 0 \\ -a & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a & 0 \\ -a+b & b \end{pmatrix}$$

$a \neq b$ 이므로

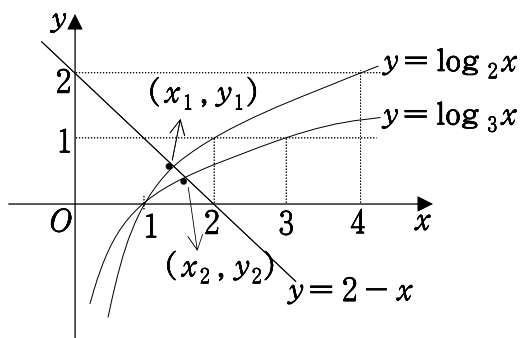
$$-a + b \neq 0$$

$$\therefore AB \neq BA \quad (\text{거짓})$$

따라서, 보기 중 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ③

16.



ㄱ. $x_1 > 1$, $y_2 < 1$ 이므로

$$x_1 > y_2 \quad (\text{참})$$

ㄴ. $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ 는 직선 $y = 2 - x$ 위의 점이므로

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = -1$$

$$\therefore x_2 - x_1 = -(y_2 - y_1)$$

$$= y_1 - y_2 \quad (\text{참})$$

$$\text{ㄷ. } x_1 y_1 - x_2 y_2 = x_1(2 - x_1) - x_2(2 - x_2)$$

$$= (x_2^2 - x_1^2) - 2(x_2 - x_1)$$

$$= (x_2 - x_1)(x_2 + x_1 - 2)$$

$x_2 - x_1 > 0$ 이고,

$x_1 > 1, x_2 > 1$ 에서 $x_1 + x_2 > 2$ 이므로

(홀수형)

2008학년도 대학수학능력시험 (수리영역-나형) 정답 및 해설

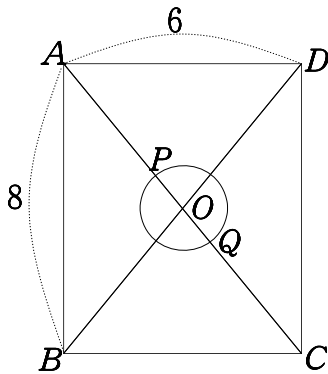
$$x_1y_1 - x_2y_2 > 0$$

$$\therefore x_1y_1 > x_2y_2 \text{ (참)}$$

따라서, 보기 중 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

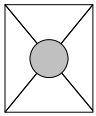
답 ⑤

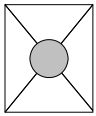
17.



$$\overline{AC} = 10, \overline{PQ} = 2 \text{ 이므로}$$

$$\overline{AP} = \frac{1}{2}(10 - 2) = 4$$



따라서,  모양의 닮은 도형들을 크기순으로 나열할 때, 인접하는 두 도형의 닮음비는

$$10 : 4 = 5 : 2$$

이고, 넓이의 비는 $25 : 4$ 이다.

R_1 에 있는 원의 넓이는 π 이고, 닮은꼴의 원의 개수는 크기순으로

$$1, 4, 4^2, 4^3, \dots$$

이므로

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} S_n &= \pi + 4 \times \frac{4}{25} \pi + 4^2 \times \left(\frac{4}{25}\right)^2 \pi \\ &\quad + 4^3 \times \left(\frac{4}{25}\right)^3 \pi + \dots \\ &= \frac{\pi}{1 - \frac{16}{25}} \end{aligned}$$

$$= \frac{25}{9} \pi$$

답 ⑤

18.

등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공차를 d 라 하면

$$a_2 = a + d = 3 \quad \dots \textcircled{㉠}$$

$$a_5 = a + 4d = 24 \quad \dots \textcircled{㉡}$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$$a = -4, \quad d = 7$$

$$\begin{aligned} \therefore a_7 &= a + 6d \\ &= -4 + 6 \cdot 7 \\ &= 38 \end{aligned}$$

답 38

19.

$$(\log_3 x)(\log_3 3x) \leq 20 \text{ 에서}$$

$$(\log_3 x)(\log_3 3 + \log_3 x) \leq 20$$

$$(\log_3 x)(1 + \log_3 x) \leq 20$$

$$\log_3 x = t \text{로 놓으면}$$

$$t(1 + t) \leq 20$$

$$t^2 + t - 20 \leq 0$$

$$(t + 5)(t - 4) \leq 0$$

$$\therefore -5 \leq t \leq 4$$

$$-5 \leq \log_3 x \leq 4$$

$$3^{-5} \leq x \leq 3^4$$

$$\therefore \frac{1}{243} \leq x \leq 81$$

따라서, 자연수 x 의 최대값은 81 이다.

답 81

20.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \text{에서}$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2 A \\ = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 6 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 9 & 1 \end{pmatrix}$$

...

$$\text{따라서, } A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3n & 1 \end{pmatrix} \quad (n \geq 2 \text{의 자연수})$$

을 추론할 수 있다.

$$\therefore A^8 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 24 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\therefore a = 24$$

답 24

21.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{4^n} = 2 \text{ 이므로 } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{4^n} = 0$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n + 4^{n+1} - 3^{n-1}}{4^{n-1} + 3^{n+1}} \\ = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{a_n}{4^n} + 4 - \frac{1}{4} \left(\frac{3}{4} \right)^{n-1}}{\frac{1}{4} + 3 \left(\frac{3}{4} \right)^n}$$

$$= \frac{0 + 4 - 0}{\frac{1}{4} + 0}$$

$$= 16$$

답 16

22.

$$M=4 \text{ 일 때, } N=64 \text{ 이므로}$$

$$\log 64 = a - 0.9 \times 4$$

$$\therefore a = 3.6 + \log 64$$

$$= 3.6 + 6 \log 2$$

$$= 3.6 + 6 \times 0.3$$

$$= 5.4$$

$$M=x \text{ 일 때, } N=1 \text{ 이므로}$$

$$\log 1 = a - 0.9x \text{에서}$$

$$0.9x = a = 5.4$$

$$\therefore 9x = 54$$

답 54

23.

한 개의 주사위를 한 번 던질 때 1의 눈이 나올 확률은 $\frac{1}{6}$ 이므로 확률변수 X 는 이항

분포 $B\left(20, \frac{1}{6}\right)$ 을 따른다.

$$\therefore V(X) = 20 \times \frac{1}{6} \times \frac{5}{6} \\ = \frac{25}{9}$$

한 개의 동전을 던질 때 앞면이 나올 확률은 $\frac{1}{2}$ 이므로 확률변수 Y 는 이항분포

$B\left(n, \frac{1}{2}\right)$ 을 따른다.

$$\therefore V(Y) = n \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \\ = \frac{n}{4}$$

$V(Y) > V(X)$ 이므로

(홀수형)

2008학년도 대학수학능력시험 (수리영역-나형) 정답 및 해설

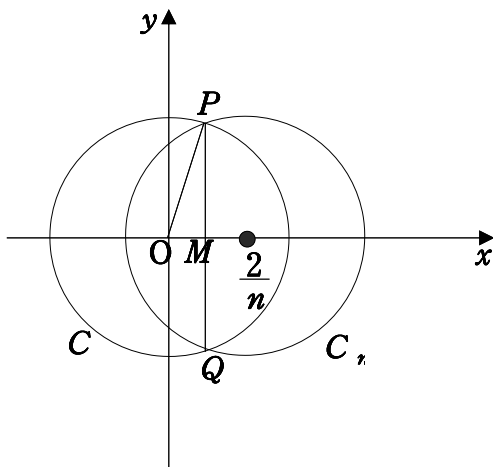
$$\frac{n}{4} > \frac{25}{9} \text{ 에서}$$

$$n > \frac{100}{9} = 11.1 \times \times \times$$

따라서, 자연수 n 의 최소값은 12이다.

답 12

24.



삼각형 POM 은 직각삼각형이고

$$\overline{OP} = 1, \overline{OM} = \frac{1}{n}$$

$$\text{이므로 } \overline{PM} = \sqrt{1 - \frac{1}{n^2}}$$

$$\therefore l_n = 2\overline{PM}$$

$$= 2\sqrt{1 - \frac{1}{n^2}}$$

$$(nl_n)^2 = n^2 l_n^2$$

$$= n^2 \cdot 4 \cdot \frac{n^2 - 1}{n^2}$$

$$= 4(n^2 - 1)$$

$$\therefore \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(nl_n)^2}$$

$$= \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{4(n^2 - 1)}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=2}^n \frac{1}{4(k^2 - 1)}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{4} \sum_{k=2}^n \frac{1}{2} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k+1} \right)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{8} \left\{ \left(1 - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) + \dots \right. \\ \left. + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1} \right) \right\}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{8} \left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right)$$

$$= \frac{3}{16}$$

$$\therefore p + q = 16 + 3 = 19$$

답 19

25.

체험 프로그램을 1, 2, 3, 4, 5라 하자.

A, B가 함께 1을 선택하는 경우

2, 3, 4, 5 중 각각 1개씩을 선택하는 경우의 수는

$${}_4P_2 = 12 \text{ (가지)}$$

A, B가 함께 2, 3, 4, 5를 선택하는 경우도 마찬가지로 구하는 경우의 수는

$$5 \times {}_4P_2 = 60 \text{ (가지)}$$

답 60

26.

점 $A(1, f(1))$ 을 x 축 방향으로 m 만큼, y 축 방향으로 n 만큼 평행이동한 점 A 의 좌표는 $(1+m, f(1)+n)$ 이므로

$$1+m=3 \text{ 에서 } m=2$$

따라서, $f(x)=2^x$ 의 그래프를 x 축 방향으로 2만큼, y 축 방향으로 n 만큼 평행이동

한 함수 $g(x)$ 는

$$g(x) = 2^{x-2} + n$$

이고, $y = g(x)$ 의 그래프가 점 $(0, 1)$ 을 지나므로

$$g(0) = 2^{-2} + n = 1 \text{ 에서}$$

$$n = \frac{3}{4}$$

$$\therefore m + n = 2 + \frac{3}{4} = \frac{11}{4}$$

답 ①

27.

6명을 2명, 2명, 2명으로 조를 편성하는 방법의 수는

$$\begin{aligned} {}_6C_2 \times {}_4C_2 \times {}_2C_2 \times \frac{1}{3!} &= 15 \times 6 \times 1 \times \frac{1}{6} \\ &= 15 \text{ (가지)} \end{aligned}$$

A, B가 같은 조에 편성되고 C, D가 서로 다른 조에 편성하려면 E, F를 각각 C, D와 짝을 이루도록 해야하므로 그 방법의 수는

$$2! = 2 \text{ (가지)}$$

따라서, 구하는 확률은

$$\frac{2}{15}$$

답 ③

28.

y 좌표가 같은 점끼리 군으로 묶으면

$$((0, 0)), ((0, 3), (1, 3), (2, 3)),$$

$$((0, 5), (1, 5), (2, 5), (3, 5), (4, 5)), \dots$$

제 n 군까지의 항수는

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2$$

이므로 100번째 항은 제10군의 마지막 항이

다. 제10군은

$$(0, 19), (1, 19), (2, 19), \dots, (18, 19)$$

이므로 100번째 항은 $(18, 19)$ 이다.

$$\therefore p + q = 18 + 19 = 37$$

답 ④

29.

$$\neg. P(|Z| \leq c) = 1 - 0.06 = 0.94 \text{ 이므로}$$

$$\begin{aligned} P(0 \leq Z \leq c) &= \frac{1}{2} P(|Z| \leq c) \\ &= 0.47 \end{aligned}$$

$$P(Z > a) = 0.05 \text{ 이면}$$

$$P(0 \leq Z \leq a) = 0.45$$

따라서, $P(0 \leq Z \leq a) < P(0 \leq Z \leq c)$ 이므로

$$a < c \text{ (참)}$$

ㄴ. 모평균 $m = 75$, 모표준편차 $\sigma = 5$,

표본의 크기 $n = 25$ 이므로

$$E(\bar{X}) = m = 75$$

$$V(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{n}$$

$$= \frac{25}{25} = 1$$

따라서, 확률변수 $\bar{X}$ 는 정규분포 $N(75, 1)$ 을 따르므로

$$\begin{aligned} P(\bar{X} \leq c + 75) &= P(Z \leq c) \\ &= 0.5 + P(0 \leq Z \leq c) \\ &= 0.5 + 0.47 = 0.97 \text{ (참)} \end{aligned}$$

ㄷ. $P(\bar{X} > b) = P(Z > b - 75) = 0.01$ 이므로

$$P(0 \leq Z \leq b - 75) = 0.49$$

$$P(0 \leq Z \leq c) < P(0 \leq Z \leq b - 75) \text{ 이므로}$$

$$c < b - 75 \text{ (참)}$$

따라서, 보기 중 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

(홀수형)

2008학년도 대학수학능력시험 (수리영역-나형) 정답 및 해설

30.

$\log N$ 의 지표가 1이므로

$$\log N = 1 + \alpha$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} + \log N &= \alpha + \log_4 \frac{N}{8} \\ &= \alpha + \log_4 N - \log_4 8 \\ &= \alpha + \frac{\log N}{\log 4} - \frac{3}{2}\end{aligned}$$

$$\frac{1}{2} + 1 + \alpha = \alpha + \frac{1 + \alpha}{\log 4} - \frac{3}{2}$$

$$3 \log 4 = 1 + \alpha$$

$$\therefore \log N = 1 + \alpha = 3 \log 4 = \log 64$$

$$\therefore N = 64$$

답 64