

수학 영역

※ 본 전국연합학력평가는 16개 시도교육청 주관
으로 시행되며, 문제지는 EBSi에서만 제공됩니다.
무단 전재 및 재배포는 금지됩니다.

정답

1	③	2	⑤	3	③	4	①	5	②
6	④	7	②	8	⑤	9	①	10	③
11	④	12	④	13	③	14	③	15	④
16	⑤	17	①	18	①	19	⑤	20	②
21	③	22	2	23	24	24	10	25	2
26	118	27	4	28	12	29	132	30	15

해설

1. [출제의도] 지수 계산하기

$$\left(2^{\frac{1}{3}}\right)^6 = 2^{\frac{1}{3} \times 6} = 2^2 = 4$$

2. [출제의도] 함수의 극한 계산하기

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - x - 6}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x - 3)(x + 2)}{x - 3} \\ = \lim_{x \rightarrow 3} (x + 2) = 5$$

3. [출제의도] 등비수열 계산하기

등비수열 $\{a_n\}$ 의 공비를 r 이라 하면

$$a_2 a_3 = 2r \times 2r^2 = 4r^3 = 48, \quad r^3 = 12$$

$$\text{따라서 } \frac{a_5}{a_2} = \frac{2r^4}{2r} = r^3 = 12$$

4. [출제의도] 삼각함수 이해하기

$$\cos^2 \theta = 1 - \sin^2 \theta = 1 - \left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^2 = 1 - \frac{5}{9} = \frac{4}{9}$$

$$0 < \theta < \frac{\pi}{2} \text{에서 } \cos \theta > 0 \text{이므로 } \cos \theta = \frac{2}{3}$$

$$\text{따라서 } \cos(\pi + \theta) = -\cos \theta = -\frac{2}{3}$$

5. [출제의도] 함수의 극한 이해하기

$$\lim_{x \rightarrow -1+} f(x) = 3, \quad \lim_{x \rightarrow 2-} f(x) = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow -1+} f(x) + \lim_{x \rightarrow 2-} f(x) = 3 + (-1) = 2$$

6. [출제의도] 지수가 포함된 부등식 이해하기

$$(2^3)^x < 2^{10} \times 2^x, \quad 2^{3x} < 2^{x+10}$$

양변의 밑이 2로 같고 1보다 크므로

$$3x < x + 10, \quad x < 5$$

따라서 부등식을 만족시키는 모든 자연수 x 는

1, 2, 3, 4이고 그 값의 합은 10

7. [출제의도] 로그의 성질 이해하기

두 점 $(a, \log_2 a)$, $(a+2, \log_2(a+2))$ 를 지나는

직선의 기울기가 2이므로

$$\frac{\log_2(a+2) - \log_2 a}{(a+2) - a} = 2$$

$$\log_2(a+2) - \log_2 a = \log_2 \frac{a+2}{a} = 4$$

$$\frac{a+2}{a} = 2^4 \text{에서 } 15a = 2$$

$$\text{따라서 } a = \frac{2}{15}$$

8. [출제의도] 등차수열 이해하기

등차수열 $\{a_n\}$ 의 공차를 d 라 하면

$$a_4 = a_1 + 3d = 6 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉠}$$

$$S_4 = S_6 \text{이므로}$$

$$S_6 - S_4 = a_5 + a_6 = (a_1 + 4d) + (a_1 + 5d) = 0$$

$$2a_1 + 9d = 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉡}$$

$\textcircled{㉠}$, $\textcircled{㉡}$ 을 연립하면

$$a_1 = 18$$

9. [출제의도] 로그의 성질 이해하기

$$\log_5 a \times \log_b 5 = \log_5 a \times \frac{1}{\log_5 b} = \log_b a = 2$$

$$\text{이므로 } a = b^2 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉠}$$

$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a} = \frac{1}{2} \text{이므로}$$

$$\log_4 a = \log_4(b+4) + \log_a b \text{에서}$$

$$\log_4 a - \log_4(b+4) = \log_4 \frac{a}{b+4} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{a}{b+4} = 4^{\frac{1}{2}} = 2$$

$$a = 2b + 8 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉡}$$

$$\textcircled{㉠}, \textcircled{㉡} \text{에 의하여 } b^2 = 2b + 8$$

$$b^2 - 2b - 8 = 0, \quad (b+2)(b-4) = 0$$

$$b = -2 \text{ 또는 } b = 4$$

$$b > 1 \text{이므로 } b = 4, \quad a = 16$$

$$\text{따라서 } a + b = 20$$

10. [출제의도] 사인법칙을 활용하여 문제
해결하기

$$\overline{BC} = a, \quad \overline{AC} = b, \quad \overline{AB} = c \text{라 하면}$$

사인법칙에 의하여

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2 \times 5 = 10$$

$$\sin A = \frac{a}{10}, \quad \sin B = \frac{b}{10}, \quad \sin C = \frac{c}{10}$$

$$\frac{\sin A}{\sin B} = \frac{\frac{a}{10}}{\frac{b}{10}} = \frac{a}{b} = \frac{3}{4} \text{이므로}$$

$$a = 3k, \quad b = 4k \quad (k > 0) \text{이라 하자.}$$

$$\sin^2 A + \sin^2 B = \sin^2 C \text{에서}$$

$$\left(\frac{a}{10}\right)^2 + \left(\frac{b}{10}\right)^2 = \left(\frac{c}{10}\right)^2 \text{이므로}$$

$$a^2 + b^2 = c^2 = 25k^2, \quad c = 5k$$

삼각형 ABC는 $\angle C = 90^\circ$ 인 직각삼각형이고,

직각삼각형 ABC의 빗변의 길이 c 는 외접원의

지름의 길이와 같으므로 $c = 5k = 10$

$$k = 2 \text{이므로 } a = 6, \quad b = 8$$

$$\text{따라서 삼각형 ABC의 넓이는 } \frac{1}{2} \times 6 \times 8 = 24$$

11. [출제의도] 지수함수의 그래프를 활용하여
문제 해결하기

$$C(2, 4-a), \quad D(2, 0) \text{이므로 } \overline{CD} = 4-a$$

삼각형 CBD의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times (4-a) \times 2 = 4-a = \frac{7}{2}, \quad a = \frac{1}{2}$$

$$\text{점 B의 좌표는 } \left(0, \frac{1}{2}\right)$$

$$\text{점 A의 좌표를 } (b, 0) \text{이라 하면 } 0 = 2^b - \frac{1}{2}$$

$$2^b = \frac{1}{2} = 2^{-1}, \quad b = -1$$

$$A(-1, 0) \text{이므로 } \overline{AD} = 3$$

$$\text{따라서 삼각형 BAD의 넓이는 } \frac{1}{2} \times 3 \times \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$$

12. [출제의도] 로그의 성질 이해하기

$$\log_2 n + \frac{1}{\log_n 4} = \log_2 n + \log_4 n = \frac{3}{2} \log_2 n$$

$$\frac{3}{2} \log_2 n = k \quad (k \text{는 자연수}) \text{라 하면}$$

$$\log_2 n = \frac{2k}{3}, \quad n = 2^{\frac{2k}{3}}$$

n 이 자연수이므로 k 는 3의 배수이다.

$$2 \leq n \leq 100 \text{인 모든 } n \text{은 } 2^2, 2^4, 2^6$$

$$\text{따라서 } 4 + 16 + 64 = 84$$

13. [출제의도] 코사인법칙을 활용하여 삼각함수
계산하기

$$\overline{BD} = 2k, \quad \overline{DC} = k \quad (k > 0) \text{이라 하면}$$

두 삼각형 ABC와 ABD에서

코사인법칙에 의하여

$$\cos(\angle ABC) = \frac{2^2 + (3k)^2 - 5^2}{2 \times 2 \times 3k} = \frac{3k^2 - 7}{4k}$$

$$\cos(\angle ABD) = \frac{2^2 + (2k)^2 - (2\sqrt{3})^2}{2 \times 2 \times 2k} = \frac{k^2 - 2}{2k}$$

$$\cos(\angle ABC) = \cos(\angle ABD) \text{이므로}$$

$$3k^2 - 7 = 2k^2 - 4, \quad k^2 = 3$$

$$k > 0 \text{이므로 } k = \sqrt{3}$$

$$\text{따라서 } \cos(\angle ABC) = \frac{3 \times 3 - 7}{4\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{6}$$

14. [출제의도] 거듭제곱근 이해하기

2 이상의 자연수 n 에 대하여

(i) n 이 홀수인 경우

$$\log \frac{n}{5} \text{의 값에 관계없이 } f(n) = 1 \text{이므로}$$

$$f(3) = f(5) = f(7) = f(9) = \cdots = 1$$

(ii) n 이 짝수인 경우

$$\textcircled{1} \log \frac{n}{5} < 0 \text{이면 } f(n) = 0 \text{이므로}$$

$$f(2) = f(4) = 0$$

$$\textcircled{2} \log \frac{n}{5} > 0 \text{이면 } f(n) = 2 \text{이므로}$$

$$f(6) = f(8) = f(10) = \cdots = 2$$

따라서 (i), (ii)에 의하여

$$\sum_{n=2}^{10} f(n) = (1+1+1+1) + (0+0+2+2+2) \\ = 4+6=10$$

15. [출제의도] 여러 가지 수열의 합 이해하기

$$x^2 = \sqrt{n}x \text{에서 } x(x - \sqrt{n}) = 0$$

$$x = 0 \text{ 또는 } x = \sqrt{n}$$

점 A_n 은 제1사분면 위의 점이므로 $A_n(\sqrt{n}, n)$

$$B_n(\sqrt{n}, 0) \text{이므로 } S_n = \frac{1}{2}n\sqrt{n}$$

따라서

$$\sum_{k=1}^{24} (S_{k+1} - S_k) \\ = (S_2 - S_1) + (S_3 - S_2) + \cdots + (S_{25} - S_{24}) \\ = S_{25} - S_1 = \frac{25\sqrt{25}}{2} - \frac{1}{2} = 62$$

16. [출제의도] 삼각함수의 그래프를 활용하여 문제 해결하기

점 $\left(\frac{2}{b}, 0\right)$ 을 D라 하자.

함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 직선 $x=\frac{1}{b}$ 에

대하여 대칭이므로 $\overline{OB}=\overline{BC}=\overline{CD}$

$A\left(0, a+\frac{1}{2}\right), B\left(\frac{2}{3b}, 0\right), C\left(\frac{4}{3b}, 0\right)$ 이고

점 B는 함수 $y=f(x)$ 의 그래프 위의 점이므로

$$a\cos\left(b\pi\times\frac{2}{3b}\right)+\frac{1}{2}=0, \quad a\cos\frac{2}{3}\pi=-\frac{1}{2}$$

$$a=1$$

$$\overline{BC}=\frac{2}{3b}, \quad \overline{OA}=a+\frac{1}{2}=\frac{3}{2} \text{ 이므로}$$

$$\text{삼각형 ABC의 넓이는 } \frac{1}{2}\times\frac{2}{3b}\times\frac{3}{2}=1$$

$$b=\frac{1}{2}$$

$$\text{따라서 } a+b=\frac{3}{2}$$

17. [출제의도] 함수의 극한을 이용하여 문제 해결하기

$$\frac{t+2}{x}=\frac{x}{t-1} \text{ 에서 } x^2=(t-1)(t+2)$$

$$x>0 \text{ 이므로 } x=\sqrt{(t-1)(t+2)}$$

$$f(t)=\sqrt{(t-1)(t+2)}, \quad g(t)=\frac{\sqrt{(t-1)(t+2)}}{t-1}$$

$$f(t)+g(t)=\frac{t\sqrt{(t-1)(t+2)}}{t-1}$$

따라서

$$\begin{aligned} \lim_{t\rightarrow 1+}(t-1)(f(t)+g(t))^2 \\ &= \lim_{t\rightarrow 1+}\left\{(t-1)\times\frac{t^2(t-1)(t+2)}{(t-1)^2}\right\} \\ &= \lim_{t\rightarrow 1+}t^2(t+2)=3 \end{aligned}$$

18. [출제의도] 수열의 합을 활용하여 추론하기
2 이상의 자연수 n 에 대하여

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \sum_{k=1}^{n+1} a_k - \sum_{k=1}^n a_k \\ &= \left(\frac{4}{5}a_{n+1} + 2^{n+1} + 3\right) - \left(\frac{4}{5}a_n + 2^n + 3\right) \\ &= \frac{4}{5}(a_{n+1} - a_n) + \boxed{2^n} \end{aligned}$$

이고, 이 식을 정리하면

$$a_{n+1} + 4a_n = 5 \times \boxed{2^n} \quad (n \geq 2) \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$\sum_{k=1}^n a_k = \frac{4}{5}a_n + 2^n + 3 \quad (n \geq 2)$$

에서 양변에 $n=2$ 를 대입하면

$$a_1 + a_2 = \frac{4}{5}a_2 + 2^2 + 3$$

$$a_1 = 5 \text{ 이므로 } 5 + a_2 = \frac{4}{5}a_2 + 7$$

$$a_2 = \boxed{10} \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 에 의하여

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^5 (a_{k+1} + 4a_k) &= (a_2 + 4a_1) + \sum_{k=2}^5 (a_{k+1} + 4a_k) \\ &= 30 + \sum_{k=2}^5 (5 \times 2^k) \\ &= 30 + 5 \times (2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5) \\ &= \boxed{330} \end{aligned}$$

$$f(n)=2^n, \quad p=10, \quad q=330$$

$$\text{따라서 } \frac{p+q}{f(2)}=\frac{10+330}{2^2}=85$$

19. [출제의도] 지수가 포함된 방정식을 이용하여 문제 해결하기

x 에 대한 방정식

$$(f(x)-14)(f(x-k)-14)=0 \text{ 에서}$$

$$f(x)=14 \text{ 또는 } f(x-k)=14$$

$$|4^x-18|=14, \quad x=1 \text{ 또는 } x=\frac{5}{2}$$

$$|4^{x-k}-18|=14, \quad x=1+k \text{ 또는 } x=\frac{5}{2}+k$$

양수 k 에 대하여

$$1 < 1+k < \frac{5}{2}+k, \quad 1 < \frac{5}{2} < \frac{5}{2}+k \text{ 이므로}$$

$$\text{방정식 } (f(x)-14)(f(x-k)-14)=0 \text{ 을}$$

만족시키는 모든 실수 x 의 값을 작은 수부터

크기순으로 나열하여 만든 수열은 $1+k$ 와 $\frac{5}{2}$ 의

대소 관계에 따라 다음 세 가지 경우로 나눌 수 있다.

(i) $1+k < \frac{5}{2}$ 인 경우

$$\text{네 수 } 1, 1+k, \frac{5}{2}, \frac{5}{2}+k \text{ 는}$$

이 순서대로 등차수열을 이루므로

$$\left(\frac{5}{2}+k\right)-\frac{5}{2}=\frac{5}{2}-(1+k)=(1+k)-1$$

$$k=\frac{3}{4} \text{ 이고 조건을 만족시킨다.}$$

(ii) $1+k = \frac{5}{2}$ 인 경우

$$k=\frac{3}{2} \text{ 이고 세 수 } 1, \frac{5}{2}, 4 \text{ 는}$$

이 순서대로 등차수열을 이루므로

조건을 만족시킨다.

(iii) $1+k > \frac{5}{2}$ 인 경우

$$\text{네 수 } 1, \frac{5}{2}, 1+k, \frac{5}{2}+k \text{ 는}$$

이 순서대로 등차수열을 이루므로

$$\left(\frac{5}{2}+k\right)-(1+k)=(1+k)-\frac{5}{2}=\frac{5}{2}-1$$

$$k=3 \text{ 이고 조건을 만족시킨다.}$$

따라서 (i), (ii), (iii)에 의하여

$$\text{모든 양수 } k \text{ 는 } \frac{3}{4}, \frac{3}{2}, 3 \text{ 이고}$$

$$\text{그 값의 합은 } \frac{21}{4}$$

20. [출제의도] 사인법칙과 코사인법칙을 활용하여 문제 해결하기

사각형 ABCD는 원에 내접하므로

$$\angle ABC=\pi-\angle ADC$$

$$\cos(\angle ABC)=-\cos(\angle ADC)=-\frac{1}{4}$$

$$\cos(\angle ADC)=\frac{1}{4} \text{ 이므로 } \sin(\angle ADC)=\frac{\sqrt{15}}{4}$$

삼각형 ADC에서 사인법칙에 의하여

$$\overline{AC}=2\times\frac{4\sqrt{15}}{5}\times\frac{\sqrt{15}}{4}=6$$

$$\overline{AB}:\overline{BC}=3:2 \text{ 이므로}$$

$$\overline{AB}=3k, \quad \overline{BC}=2k \quad (k>0) \text{ 이라 하면}$$

삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$$6^2=(3k)^2+(2k)^2-2\times 3k\times 2k\times\left(-\frac{1}{4}\right)$$

$$36=16k^2, \quad k=\frac{3}{2}$$

$$\overline{AB}=\frac{9}{2}, \quad \overline{BC}=\overline{CD}=3$$

$$\overline{AD}=x \quad (x>0) \text{ 이라 하면}$$

삼각형 ACD에서 코사인법칙에 의하여

$$6^2=3^2+x^2-2\times 3\times x\times\frac{1}{4}$$

$$2x^2-3x-54=0, \quad (x-6)(2x+9)=0$$

$$x=6, \quad \overline{AD}=6$$

원의 중심을 O, $\angle BCE=\theta$ 라 하면

삼각형 OBC는 $\overline{OB}=\overline{OC}$ 인 이등변삼각형이고

$$\angle OCE=\frac{\pi}{2}, \quad \angle OCB=\angle OBC=\frac{\pi}{2}-\theta \text{ 이다.}$$

$$\angle BOC=\pi-2\times\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=2\theta$$

$\angle BAC$ 는 호 BC에 대한 원주각이므로

$$\angle BAC=\frac{1}{2}\times\angle BOC=\theta$$

두 삼각형 CBE와 ACE는

$$\angle BCE=\angle CAE, \quad \angle BEC=\angle CEA \text{ (공통)}$$

이므로 서로 닮음이다.

$$\overline{AC}:\overline{CB}=2:1 \text{ 이므로}$$

$$\overline{AE}:\overline{CE}=2:1, \quad \overline{AE}=\frac{9}{2}+\overline{BE}=2\overline{CE} \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$\overline{CE}:\overline{BE}=2:1, \quad \overline{CE}=2\overline{BE} \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{에 의하여 } \overline{BE}=\frac{3}{2}, \quad \overline{CE}=3$$

$$\overline{AE}=\overline{AB}+\overline{BE}=\frac{9}{2}+\frac{3}{2}=6$$

두 삼각형 ABC와 CDF는

$$\angle ABC=\angle CDF, \quad \angle BAC=\angle CAD=\angle DCF$$

이므로 서로 닮음이고,

$$\overline{AB}:\overline{CD}=\frac{9}{2}:3=3:2 \text{ 이므로}$$

$$\overline{CF}=4$$

$$\overline{EF}=\overline{EC}+\overline{CF}=3+4=7$$

따라서 $\angle AEF=\angle CBE=\angle ADC$ 이므로

삼각형 AEF의 넓이는

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\times\overline{AE}\times\overline{EF}\times\sin(\angle AEF) \\ = \frac{1}{2}\times 6\times 7\times\frac{\sqrt{15}}{4}=\frac{21\sqrt{15}}{4} \end{aligned}$$

21. [출제의도] 등차수열을 활용하여 문제 해결하기

$a_1 < 0$ 이면 모든 자연수 n 에 대하여

$$a_n < 0 \text{ 이고 } \sum_{k=1}^n a_k < 0 \text{ 이므로}$$

$$\sum_{k=1}^n |a_k|=\sum_{k=1}^n (-a_k)=-\sum_{k=1}^n a_k$$

$$\left|\sum_{k=1}^n a_k\right|=-\sum_{k=1}^n a_k$$

모든 자연수 n 에 대하여

$$b_n=\left(-\sum_{k=1}^n a_k\right)-\left(-\sum_{k=1}^n a_k\right)=0 \text{ 이므로}$$

조건 (가)를 만족시키지 않는다.

그러므로 $a_1 > 0$

등차수열 $\{a_n\}$ 은 모든 항이 0이 아닌 정수이고

공차가 음수이므로 어떤 자연수 p 에 대하여

$$a_{p+1} < 0 < a_p \text{ 를 만족시킨다.}$$

$i \leq p$ 인 모든 자연수 i 에 대하여 $a_i > 0$ 이므로

$$b_i = \sum_{k=1}^i |a_k| - \left| \sum_{k=1}^i a_k \right| = 0$$

$j > p$ 인 모든 자연수 j 에 대하여

$$\sum_{k=1}^j |a_k| = (a_1 + a_2 + \cdots + a_p) - (a_{p+1} + \cdots + a_j)$$

$$\left| \sum_{k=1}^j a_k \right| = (a_1 + a_2 + \cdots + a_p) + (a_{p+1} + \cdots + a_j)$$

또는

$$\left| \sum_{k=1}^j a_k \right| = -(a_1 + a_2 + \cdots + a_p) - (a_{p+1} + \cdots + a_j)$$

$$\text{이므로 } b_j = \sum_{k=1}^j |a_k| - \left| \sum_{k=1}^j a_k \right| \neq 0$$

조건 (가)에 의하여 $p = 3$ 이므로 $a_4 < 0 < a_3$

등차중항의 성질에 의하여

$$\sum_{k=1}^4 a_k = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = a_1 + 3a_3 > 0,$$

$$\sum_{k=1}^5 a_k = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 5a_3 > 0 \text{ 이므로}$$

$$\begin{aligned} b_4 &= \sum_{k=1}^4 |a_k| - \left| \sum_{k=1}^4 a_k \right| \\ &= (a_1 + a_2 + a_3 - a_4) - (a_1 + a_2 + a_3 + a_4) \\ &= -2a_4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_5 &= \sum_{k=1}^5 |a_k| - \left| \sum_{k=1}^5 a_k \right| \\ &= (a_1 + a_2 + a_3 - a_4 - a_5) \\ &\quad - (a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5) \\ &= -2a_4 - 2a_5 \end{aligned}$$

$$\sum_{k=1}^6 a_k \geq 0 \text{ 이면}$$

$$\begin{aligned} b_6 &= \sum_{k=1}^6 |a_k| - \left| \sum_{k=1}^6 a_k \right| \\ &= (a_1 + a_2 + a_3 - a_4 - a_5 - a_6) \\ &\quad - (a_1 + a_2 + \cdots + a_6) \\ &= -2a_4 - 2a_5 - 2a_6 \end{aligned}$$

$$b_5 - b_4 = -2a_5, \quad b_6 - b_5 = -2a_6$$

$$-2a_5 \neq -2a_6 \text{ 이므로}$$

조건 (나)를 만족시키지 않는다.

$$\text{그러므로 } \sum_{k=1}^6 a_k < 0$$

$l \geq 6$ 인 모든 자연수 l 에 대하여 $a_l < 0$ 이므로

$$\sum_{k=1}^l a_k < 0$$

$$\begin{aligned} b_l &= \sum_{k=1}^l |a_k| - \left| \sum_{k=1}^l a_k \right| \\ &= (a_1 + a_2 + a_3 - a_4 - a_5 - \cdots - a_l) \\ &\quad + (a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_l) \\ &= 2(a_1 + a_2 + a_3) = 6a_2 \end{aligned}$$

$$\text{이므로 } b_6 = b_{10} = 6a_2 = 48, \quad a_2 = 8$$

등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a ($a > 0$),

공차를 d ($d < 0$) 이라 하면

$$a_2 = a + d = 8 \quad \cdots \cdots \textcircled{7}$$

세 수 b_4, b_5, b_6 은 이 순서대로 등차수열을

이루므로 등차중항의 성질에 의하여

$$b_4 + b_6 = 2b_5$$

$$b_6 = 2b_5 - b_4 = -2a_4 - 4a_5 = -6a - 22d = 48$$

$$3a + 11d = -24 \quad \cdots \cdots \textcircled{8}$$

$$\textcircled{7}, \textcircled{8} \text{을 연립하면 } a = 14, \quad d = -6$$

$$\text{따라서 } b_5 = -2a_4 - 2a_5 = -2(2a + 7d) = 28$$

22. [출제의도] 지수가 포함된 방정식 계산하기

$$2^{x-6} = \left(\frac{1}{4}\right)^x = 2^{-2x}$$

$$x - 6 = -2x, \quad x = 2$$

23. [출제의도] 일반각과 호도법 이해하기

부채꼴의 중심각의 크기를 θ 라 하면

$$6\pi = 8 \times \theta, \quad \theta = \frac{3}{4}\pi$$

$$\text{부채꼴의 넓이는 } a\pi = \frac{1}{2} \times 8^2 \times \frac{3}{4}\pi = 24\pi$$

$$\text{따라서 } a = 24$$

24. [출제의도] Σ 의 성질 이해하기

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{15} (3a_k + 2) &= 3 \sum_{k=1}^{15} a_k + \sum_{k=1}^{15} 2 \\ &= 3 \sum_{k=1}^{15} a_k + 30 = 60 \end{aligned}$$

$$3 \sum_{k=1}^{15} a_k = 30, \quad \sum_{k=1}^{15} a_k = 10$$

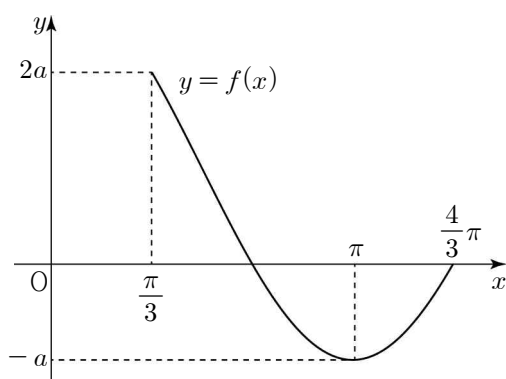
25. [출제의도] 삼각함수의 그래프 이해하기

$$f\left(\frac{\pi}{3}\right) = 2a \times \frac{1}{2} + a = 2a$$

$$f(\pi) = 2a \times (-1) + a = -a$$

$$f\left(\frac{4}{3}\pi\right) = 2a \times \left(-\frac{1}{2}\right) + a = 0$$

함수 $y = f(x)$ 의 그래프의 개형은 다음과 같다.



함수 $f(x)$ 의 최댓값은 $2a$, 최솟값은 $-a$
최댓값과 최솟값의 곱은

$$2a \times (-a) = -2a^2 = -8, \quad a^2 = 4$$

$$\text{따라서 } a > 0 \text{ 이므로 } a = 2$$

26. [출제의도] 등비수열을 활용하여 문제 해결하기

두 등비수열 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 의 공비를 각각 r, R ($r > 0, R > 0$) 이라 하자.

$$a_1 = b_1, \quad a_7 = b_3 \text{ 이므로 } r^6 = R^2, \quad r^3 = R$$

$$\sum_{k=1}^3 \frac{b_k}{a_k} = 1 + \frac{R}{r} + \left(\frac{R}{r}\right)^2 = 1 + r^2 + r^4 = 91$$

$$r^2 = t \text{ 라 하면 } t^2 + t - 90 = 0$$

$$(t - 9)(t + 10) = 0$$

$$t > 0 \text{ 이므로 } t = 9, \quad r = 3$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^3 \frac{a_{k+1}}{b_k} &= r + \frac{r^2}{R} + \frac{r^3}{R^2} = r + \frac{1}{r} + \frac{1}{r^3} \\ &= 3 + \frac{1}{3} + \frac{1}{27} = \frac{91}{27} \end{aligned}$$

$$p = 27, \quad q = 91$$

$$\text{따라서 } p + q = 27 + 91 = 118$$

27. [출제의도] 삼각함수의 그래프를 이용하여 문제 해결하기

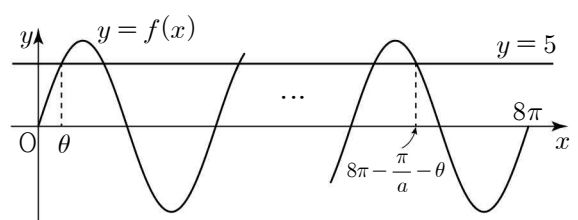
$$\text{함수 } y = 8 \sin ax \text{ 의 주기가 } \frac{2\pi}{a} \text{ (} a \text{ 는 자연수)}$$

이므로

$$f\left(\frac{2\pi}{a}\right) = f\left(\frac{4\pi}{a}\right) = \cdots = f\left(\frac{2\pi}{a} \times 4a\right) = 0$$

함수 $y = f(x)$ 의 그래프가 직선 $y = 5$ 와 만나는 점의 x 좌표 중 가장 작은 값을 θ 라 하면,

$$\text{가장 큰 값은 } 8\pi - \frac{\pi}{a} - \theta \text{ 이다.}$$



$$\theta + \left(8\pi - \frac{\pi}{a} - \theta\right) = 8\pi - \frac{\pi}{a} = \frac{31}{4}\pi, \quad \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{a}$$

$$\text{따라서 } a = 4$$

28. [출제의도] 지수함수와 로그함수를 활용하여 문제 해결하기

$$f^{-1}(x) = \log_2 \left(x - \frac{9}{2}\right) + 4$$

$$\begin{aligned} \log_2 \left(x - \frac{9}{2}\right) + 4 &= \log_2 \left\{ \left(x + \frac{3}{2}\right) - 6 \right\} + \frac{5}{2} + \frac{3}{2} \\ &= g\left(x + \frac{3}{2}\right) + \frac{3}{2} \end{aligned}$$

이므로 곡선 $y = g(x)$ 를 x 축의 방향으로

$$-\frac{3}{2} \text{ 만큼, } y \text{ 축의 방향으로 } \frac{3}{2} \text{ 만큼 평행이동하면}$$

곡선 $y = f^{-1}(x)$ 와 일치한다.

선분 AC 의 중점을 M 이라 하면,

점 M 은 함수 $y = f^{-1}(x)$ 의 그래프 위의

$$\text{점이므로 } \overline{CM} = \frac{3\sqrt{2}}{2}, \quad \overline{AC} = 3\sqrt{2}$$

직사각형 ACDB 의 넓이가 6 이므로 $\overline{AB} = \sqrt{2}$

$a < b$ 인 두 실수 a, b 에 대하여

$$A\left(a, 2^{a-4} + \frac{9}{2}\right), B\left(b, 2^{b-4} + \frac{9}{2}\right) \text{ 라 하자.}$$

직선 AB 의 기울기가 1 이므로

두 점 A, B 의 x 좌표의 차는

$$b - a = 1 \quad \cdots \cdots \textcircled{7}$$

두 점 A, B 의 y 좌표의 차는

$$\left(2^{b-4} + \frac{9}{2}\right) - \left(2^{a-4} + \frac{9}{2}\right) = 1 \quad \cdots \cdots \textcircled{8}$$

$$\textcircled{7}, \textcircled{8} \text{을 연립하면 } a = 4, \quad b = 5$$

따라서 두 점 A, B 의 y 좌표의 합은

$$\left(2^{4-4} + \frac{9}{2}\right) + \left(2^{5-4} + \frac{9}{2}\right) = 12$$

29. [출제의도] 귀납적으로 정의된 수열 추론하기

(i) 자연수 k 가 짝수인 경우

$$k = 2p \text{ (} p \text{ 는 자연수) 라 하자.}$$

$$a_1 = 0 \text{ 이므로}$$

$$a_2 = 2p, \quad a_3 = 2p - 2, \quad \cdots$$

$$a_{p+2} = 2p - 2\{(p+2) - 2\} = 0$$

이러한 과정을 반복하면

수열 $\{a_n\}$ 의 항 중 0 이 되는 항은

$$a_1, a_{p+2}, a_{2p+3}, a_{3p+4}, a_{4p+5}, \cdots$$

이고, $a_m = 0$ 을 만족시키는 50 이하의

자연수 m 의 개수가 4 이므로

$$3p + 4 \leq 50 \text{ 이고 } 4p + 5 > 50$$

$$\frac{45}{4} < p \leq \frac{46}{3} \text{ 인}$$

자연수 p 는 12, 13, 14, 15
그러므로 k 는 24, 26, 28, 30

(ii) 자연수 k 가 홀수인 경우
 $k = 2q - 1$ (q 는 자연수) 라 하자.

$a_1 = 0$ 이므로

$$a_2 = 2q - 1, a_3 = 2q - 3, \dots$$

$$a_{q+2} = 2q - 1 - 2\{(q+2) - 2\} = -1 \text{ 이고,}$$

$$a_{q+3} = -1 + (2q - 1) = 2q - 2, \dots$$

$$a_{2q+2} = 2q - 2 - 2\{(2q+2) - (q+3)\} = 0$$

이러한 과정을 반복하면

수열 $\{a_n\}$ 의 항 중 0 이 되는 항은

$$a_1, a_{2q+2}, a_{4q+3}, a_{6q+4}, a_{8q+5}, \dots$$

이고, $a_m = 0$ 을 만족시키는 50 이하의

자연수 m 의 개수가 4 이므로

$$6q + 4 \leq 50 \text{ 이고 } 8q + 5 > 50$$

$$\frac{45}{8} < q \leq \frac{23}{3} \text{ 인 자연수 } q \text{ 는 } 6, 7$$

그러므로 k 는 11, 13

따라서 (i), (ii)에 의하여 모든 k 의 값의 합은
(24 + 26 + 28 + 30) + (11 + 13) = 132

30. [출제의도] 함수의 극한을 활용하여 추론하기

집합 $A = \{k \mid f(k) \times f(-k) = 0, k \neq 0\}$ 에
대하여 $s \in A$ 이면 $-s \in A$ 이다.

$$f(1) = -\frac{49}{16}(1-b) > 0 \text{ 이므로 } b > 1$$

(i) $b \neq 2$ 인 경우

조건 (가)에 의하여

함수 $y = f(x)$ 의 그래프가 $x < 0$ 에서

x 축과 오직 한 점에서 만나거나

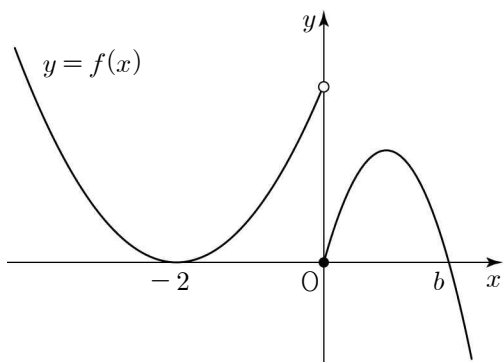
$b = -a$ 이다.

① 함수 $y = f(x)$ 의 그래프가 $x < 0$ 에서
 x 축과 오직 한 점에서 만나는 경우

$$a = -2 \text{ 또는 } 0 \leq a < 2$$

$a = -2$ 일 때,

함수 $y = f(x)$ 의 그래프의 개형은 다음과
같다.



모든 실수 t 에 대하여 $g(t) \neq 0$ 이므로

$$g(\alpha) \neq \lim_{t \rightarrow \alpha+} g(t) \text{ 이고}$$

$$g(\alpha) \times g(-\alpha) = \lim_{t \rightarrow \alpha+} g(t) \times \lim_{t \rightarrow -\alpha+} g(t)$$

이면 $g(-\alpha) \neq \lim_{t \rightarrow -\alpha+} g(t)$ 이다.

$$g(\alpha) \neq \lim_{t \rightarrow \alpha+} g(t), g(-\alpha) \neq \lim_{t \rightarrow -\alpha+} g(t) \text{ 를}$$

동시에 만족시키는 0 이 아닌 실수 α 가
존재하지 않으므로 조건 (나)를 만족시키지
않는다.

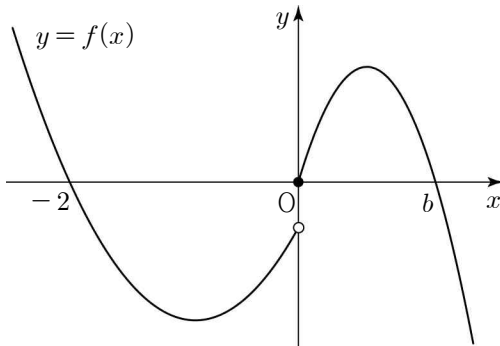
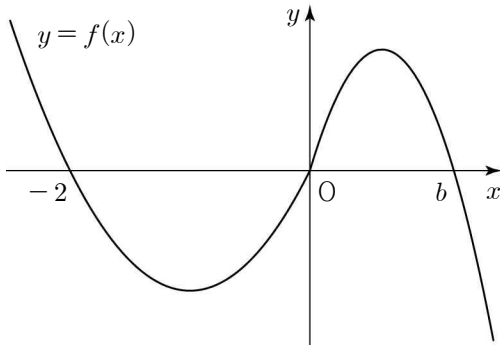
$0 \leq a < 2$ 일 때,

이차함수 $y = (x+2)(x-a)$ 의 그래프는

직선 $x = \frac{-2+a}{2}$ 에 대하여 대칭이고

$$\frac{-2+a}{2} < 0 \text{ 이므로}$$

함수 $y = f(x)$ 의 그래프의 개형은 다음 중
하나이다.



$$-\frac{49}{16}x(x-b) = -\frac{49}{16}\left(x - \frac{b}{2}\right)^2 + \frac{49}{64}b^2$$

$$(x+2)(x-a) = \left(x + \frac{2-a}{2}\right)^2 - \frac{a^2}{4} - a - 1$$

이므로

$$g(\alpha) \neq \lim_{t \rightarrow \alpha+} g(t) \text{ 를 만족시키는 } 0 \text{ 이 아닌}$$

$$\text{실수 } \alpha \text{ 는 } \frac{49}{64}b^2 \text{ 또는 } -\frac{a^2}{4} - a - 1$$

모든 실수 t 에 대하여 $g(t) \neq 0$ 이므로

$$g(\alpha) \neq \lim_{t \rightarrow \alpha+} g(t), g(-\alpha) \neq \lim_{t \rightarrow -\alpha+} g(t) \text{ 를}$$

동시에 만족시키기 위해서는

$$\frac{49}{64}b^2 = -\left(-\frac{a^2}{4} - a - 1\right)$$

$$\text{이때 } \beta = \frac{49}{64}b^2 \text{ 이라 하면}$$

$$\lim_{t \rightarrow \beta+} g(t) = 1, g(\beta) = 2,$$

$$\lim_{t \rightarrow -\beta+} g(t) = 3, g(-\beta) = 2 \text{ 이므로}$$

조건 (나)를 만족시키지 않는다.

② $b = -a$ 인 경우

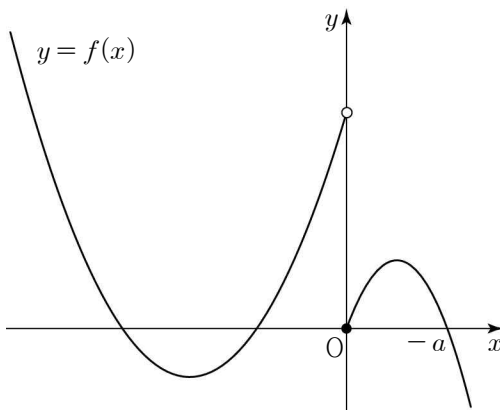
함수 $y = f(x)$ 의 그래프가 $x < 0$ 에서

x 축과 서로 다른 두 점

$$(-2, 0), (a, 0) \quad (a < 0, a \neq -2)$$

에서 만나므로 조건 (나)를 만족시키기

위해서 함수 $y = f(x)$ 의 그래프의 개형은
다음과 같아야 한다.



$$g(\alpha) \neq \lim_{t \rightarrow \alpha+} g(t) \text{ 를 만족시키는 } 0 \text{ 이 아닌}$$

$$\text{실수 } \alpha \text{ 는 } \frac{49}{64}a^2 \text{ 또는 } -\frac{a^2}{4} - a - 1$$

모든 실수 t 에 대하여 $g(t) \neq 0$ 이므로

$$g(\alpha) \neq \lim_{t \rightarrow \alpha+} g(t), g(-\alpha) \neq \lim_{t \rightarrow -\alpha+} g(t) \text{ 를}$$

동시에 만족시키기 위해서는

$$\frac{49}{64}a^2 = -\left(-\frac{a^2}{4} - a - 1\right)$$

$$a = -\frac{8}{11} \text{ 또는 } a = \frac{8}{3}$$

$$a = -\frac{8}{11} \text{ 일 때, } b = \frac{8}{11}$$

$$a = \frac{8}{3} \text{ 일 때, } b = -\frac{8}{3}$$

$f(1) < 0$ 이므로 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $b = 2$ 인 경우

조건 (가)에 의하여

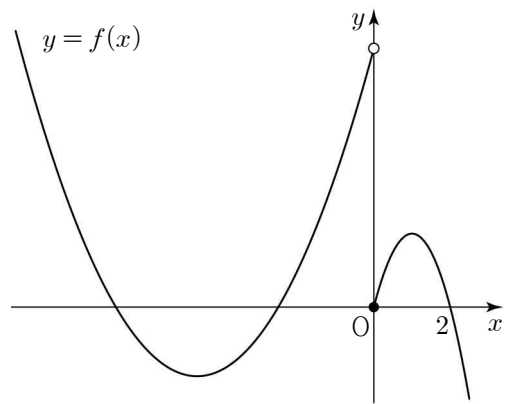
함수 $y = f(x)$ 의 그래프가 $x < 0$ 에서

x 축과 서로 다른 두 점

$$(-2, 0), (a, 0) \quad (a < 0, a \neq -2)$$

에서 만나므로 조건 (나)를 만족시키기

위해서 함수 $y = f(x)$ 의 그래프의 개형은
다음과 같아야 한다.



$$g(\alpha) \neq \lim_{t \rightarrow \alpha+} g(t) \text{ 를 만족시키는 } 0 \text{ 이 아닌}$$

$$\text{실수 } \alpha \text{ 는 } \frac{49}{16} \text{ 또는 } -\frac{a^2}{4} - a - 1$$

모든 실수 t 에 대하여 $g(t) \neq 0$ 이므로

$$g(\alpha) \neq \lim_{t \rightarrow \alpha+} g(t), g(-\alpha) \neq \lim_{t \rightarrow -\alpha+} g(t) \text{ 를}$$

동시에 만족시키기 위해서는

$$\frac{49}{16} = -\left(-\frac{a^2}{4} - a - 1\right)$$

$$a = -\frac{11}{2} \text{ 또는 } a = \frac{3}{2}$$

$$a < 0 \text{ 이므로 } a = -\frac{11}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0-} f(x) = -2a = 11 > \frac{49}{16} \text{ 에서}$$

$$\lim_{t \rightarrow \frac{49}{16}+} g(t) = 2, g\left(\frac{49}{16}\right) = 3,$$

$$\lim_{t \rightarrow -\frac{49}{16}+} g(t) = 3, g\left(-\frac{49}{16}\right) = 2 \text{ 이므로}$$

조건 (나)를 만족시킨다.

$$(i), (ii) \text{에 의하여 } a = -\frac{11}{2}, b = 2$$

따라서

$$f(-8) = (-8+2) \times \left\{-8 - \left(-\frac{11}{2}\right)\right\} = 15$$