

$$2a^2 - 6a - 20 = 2(a+2)(a-5) = 0$$

$$a = -2 \text{ 또는 } a = 5$$

$$\textcircled{1} \text{에 의하여 } a = -2$$

$$f(x) = (x+2)^2 - 6$$

$$\text{따라서 } f(2) = 10$$

15. [출제의도] 행렬의 연산 이해하기

$$A = (2A + B) - (A + B)$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ b & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ a & -4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -a+b & 2 \end{pmatrix}$$

$$B = (A + B) - A$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ a & -4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -a+b & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2a-b & -6 \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -a+b & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2a-b & -6 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2a-b-2 & 0 \\ 5a-3b & -3a+3b-12 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$2a-b=2, a-b=-4$$

$$a=6, b=10$$

$$\text{따라서 } a+b=16$$

16. [출제의도] 삼차방정식을 활용하여

문제 해결하기

$$x^3 - 2(m+1)x^2 + 4(m+1)x - 8$$

$$= (x-2)(x^2 - 2mx + 4) = 0$$

$$x=2 \text{ 또는 } x^2 - 2mx + 4 = 0$$

(i) 방정식 $x^2 - 2mx + 4 = 0$ 이 중근 2를 갖는 경우

$$x^2 - 2mx + 4 = (x-2)^2$$

$$m=2$$

(ii) 방정식 $x^2 - 2mx + 4 = 0$ 이 서로 다른 두 허근을 갖는 경우

$$\text{이차방정식 } x^2 - 2mx + 4 = 0 \text{ 의 판별식을}$$

$$D \text{ 라 하면}$$

$$\frac{D}{4} = m^2 - 4 = (m+2)(m-2) < 0$$

$$-2 < m < 2$$

(i), (ii)에 의하여 $-2 < m < 2$

$$\text{정수 } m \text{ 은 } -1, 0, 1, 2$$

$$\text{따라서 모든 정수 } m \text{ 의 개수는 } 4$$

17. [출제의도] 순열과 조합을 활용하여

문제 해결하기

7 장의 카드의 자리를 다음과 같이 ①~⑦이라 하자.

$$\textcircled{1} \textcircled{2} \textcircled{3} \textcircled{4} \textcircled{5} \textcircled{6} \textcircled{7}$$

조건 (가)에 의하여 홀수가 적힌 카드가 ①과 ⑦에 놓인 경우의 수는

$${}_4P_2 = 12$$

(i) 6이 적힌 카드가 ② 또는 ⑥에 놓인 경우

6이 적힌 카드의 한쪽 옆에 놓인 카드에 적힌 수가 홀수이므로 조건 (나)에 의하여 다른 한쪽 옆에 놓인 카드에 적힌 수는 2 또는 4이다.

$${}_2C_1 = 2$$

나머지 3 장의 카드를 나열하는 경우의 수는 $3! = 6$

$$\text{경우의 수는 } 2 \times (2 \times 6) = 24$$

(ii) 6이 적힌 카드가 ③ 또는 ④ 또는 ⑤에 놓인 경우

조건 (나)에 의하여 6이 적힌 카드의 바로 양옆에 놓인 카드에 적힌 두 수 중 적어도 하나는 짝수이다.

(1) 6이 적힌 카드의 바로 양옆에 놓인 카드에 적힌 두 수가 모두 짝수인 경우

2와 4가 적힌 카드를 나열하는 경우의 수는

$$2! = 2$$

나머지 2 장의 카드를 나열하는 경우의 수는

$$2! = 2$$

$$\text{경우의 수는 } 2 \times 2 = 4$$

(2) 6이 적힌 카드의 바로 양옆에 놓인 카드에 적힌 두 수가 홀수와 짝수인 경우

홀수와 짝수가 적힌 카드를 나열하는 경우의 수는

$${}_2C_1 \times {}_2C_1 \times 2! = 8$$

나머지 2 장의 카드를 나열하는 경우의 수는

$$2! = 2$$

$$\text{경우의 수는 } 8 \times 2 = 16$$

(1), (2)에 의하여 경우의 수는

$$3 \times (4 + 16) = 60$$

(i), (ii)에 의하여 구하는 경우의 수는

$$12 \times (24 + 60) = 1008$$

18. [출제의도] 이차함수의 최대, 최소를

활용하여 문제 해결하기

두 점 A, B의 x 좌표를 각각 α, β ($\alpha < 0 < \beta$)

라 하면 방정식 $x^2 + (1-m)x - 8 = 0$ 의 두 실근은 α, β 이다.

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha + \beta = m - 1, \alpha\beta = -8$$

$$S_1 = \frac{1}{2} \times \overline{OC} \times (-\alpha) = -2\alpha$$

$$S_2 = \frac{1}{2} \times \overline{OD} \times \beta = 2\beta$$

$$(S_1 + S_2)^2 = 4(\beta - \alpha)^2$$

$$= 4\{(\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta\}$$

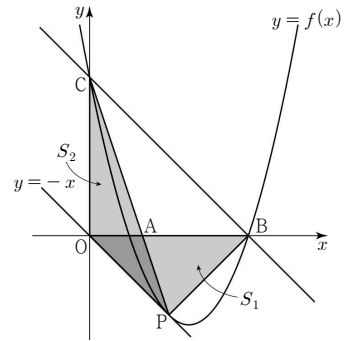
$$= 4\{(m-1)^2 + 32\}$$

$$= 4(m-1)^2 + 128 \quad (2 \leq m \leq 6)$$

$$m=2 \text{ 일 때, } (S_1 + S_2)^2 \text{ 의 최솟값은 } 132$$

19. [출제의도] 이차함수의 그래프와 직선의 위치

관계 추론하기



이차함수 $f(x)$ 의 최고차항의 계수를 k ($k > 0$)이라 하면

$$f(x) = k(x-4)(x-a)$$

$$S_1 = S_2 \text{ 이므로 직선 BC의 기울기는}$$

$$\boxed{-1} \text{ 이다.}$$

함수 $y=f(x)$ 의 그래프와

직선 BC가 두 점 B, C에서 만나므로

$$\text{방정식 } k(x-4)(x-a) = \boxed{-1} \times (x-a) \text{의}$$

두 근은 0, a이다.

$$(x-a)(kx-4k+1) = 0$$

$$-4k+1 = 0$$

$$k = \boxed{\frac{1}{4}}$$

함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=-x$ 가

한 점 P에서만 만나므로

x에 대한 이차방정식

$$\boxed{\frac{1}{4}} \times (x-4)(x-a) = -x \text{는 중근을 갖는다.}$$

이차방정식 $x^2 - ax + 4a = 0$ 의 판별식을 D라 하면

$$D = a^2 - 16a = a(a-16) = 0$$

$$\text{따라서 } a = \boxed{16} \text{ 이다.}$$

$$p = -1, q = \frac{1}{4}, r = 16 \text{ 이므로}$$

$$\frac{p+r}{q} = 60$$

20. [출제의도] 조합을 활용하여 문제 해결하기

조건 (가)에 의하여 2개의 공이 들어 있는

상자는 2와 5 또는 3과 5 또는 3과 6이 적힌 상자이다.

두 상자에 공을 각각 2개씩 넣는 경우의 수는

$${}_5C_2 \times {}_3C_2 = 10 \times 3 = 30$$

(i) 2와 5가 적힌 상자인 경우

조건 (나)에 의하여 남은 공 1개를

1, 6, 7이 적힌 상자에 넣는 경우의 수는

$${}_3C_1 = 3$$

(ii) 3과 5가 적힌 상자인 경우

조건 (나)에 의하여 남은 공 1개를

1, 2, 6, 7이 적힌 상자에 넣는 경우의 수는

$${}_4C_1 = 4$$

(iii) 3과 6이 적힌 상자인 경우

조건 (나)에 의하여 남은 공 1개를

1, 2, 7이 적힌 상자에 넣는 경우의 수는

$${}_3C_1 = 3$$

(i), (ii), (iii)에 의하여 구하는 경우의 수는

$$30 \times (3 + 4 + 3) = 300$$

21. [출제의도] 이차방정식과 이차함수를 활용하여 문제 해결하기

방정식 $(f(x)-6)(g(x)-2)=0$ 에서

$$f(x)-6=0 \text{ 또는 } g(x)-2=0$$

방정식 $f(x)-6=0$ 에서

$$\frac{1}{4}(x-a)^2-4=0$$

$$(x-a)^2-16=(x-a+4)(x-a-4)=0$$

$$x=a-4 \text{ 또는 } x=a+4$$

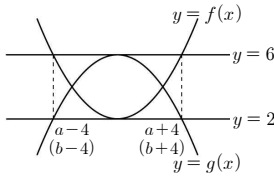
방정식 $g(x)-2=0$ 에서

$$-\frac{1}{4}(x-b)^2+4=0$$

$$(x-b)^2-16=(x-b+4)(x-b-4)=0$$

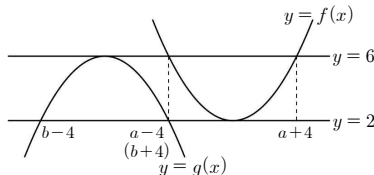
$$x=b-4 \text{ 또는 } x=b+4$$

(i) $a-4=b-4$ (또는 $a+4=b+4$) 인 경우



방정식 $(f(x)-6)(g(x)-2)=0$ 의 서로 다른 실근의 개수가 2 이므로 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $a-4=b+4$ 인 경우



$$b-4=-3 \text{ 이므로 } b=1$$

$$a=b+8=9$$

$$f(x)=\frac{1}{4}(x-9)^2+2$$

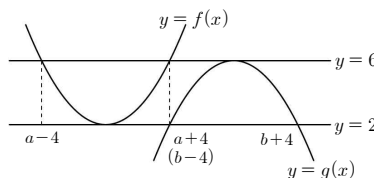
$$g(x)=-\frac{1}{4}(x-1)^2+6$$

$$g(0)=\frac{23}{4}>0$$

$$a-4=-3+t \text{ 이므로 } t=8$$

$$f(8)+g(8)=\frac{9}{4}+\left(-\frac{25}{4}\right)=-4$$

(iii) $a+4=b-4$ 인 경우



$$a-4=-3 \text{ 이므로 } a=1$$

$$b=a+8=9$$

$$f(x)=\frac{1}{4}(x-1)^2+2$$

$$g(x)=-\frac{1}{4}(x-9)^2+6$$

$$g(0)=-\frac{57}{4}<0 \text{ 이므로 조건을 만족시키지}$$

않는다.

(i), (ii), (iii)에 의하여

$$f(8)+g(8)=-4$$

22. [출제의도] 순열과 조합의 수 계산하기

$${}_3C_1=3$$

$${}_5P_2=5 \times 4=20$$

$$\text{따라서 } {}_3C_1+{}_5P_2=3+20=23$$

23. [출제의도] 이차방정식의 판별식 계산하기

이차방정식 $x^2-3x+10-a=0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$D=(-3)^2-4 \times (10-a)=4a-31<0$$

$$a<\frac{31}{4}$$

자연수 a 는 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7

따라서 모든 자연수 a 의 개수는 7

24. [출제의도] 행렬의 곱셈을 활용하여 문제 해결하기

$$AB=\begin{pmatrix} -1 & a \\ 2 & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2a-1 & -ab+3 \\ 2b+2 & -b^2-6 \end{pmatrix}$$

$$BA=\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & a \\ 2 & b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -7 & a-3b \\ -2b-2 & 2a-b^2 \end{pmatrix}$$

$$AB=-BA \text{ 이므로}$$

$$\begin{pmatrix} 2a-1 & -ab+3 \\ 2b+2 & -b^2-6 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 7 & -a+3b \\ 2b+2 & -2a+b^2 \end{pmatrix}$$

$$2a-1=7, a=4$$

$$-ab+3=-a+3b \text{ 에서}$$

$$-4b+3=-4+3b$$

$$b=1$$

$$\text{따라서 } a+b=5$$

25. [출제의도] 연립이차방정식 이해하기

$$x^2-xy-6y^2=(x+2y)(x-3y)=0 \text{ 에서}$$

$$x=-2y \text{ 또는 } x=3y$$

$$x>0, y>0 \text{ 이므로}$$

$$x=3y$$

$$x=3y \text{ 를 } x^2+3y^2=48 \text{ 에 대입하면}$$

$$(3y)^2+3y^2=48$$

$$y^2=4$$

$$y=2, x=6 \text{ 에서 } \alpha=6, \beta=2$$

$$\text{따라서 } \alpha \times \beta=12$$

26. [출제의도] 연립이차부등식 이해하기

$$|x-a| \leq 2 \text{ 에서}$$

$$-2 \leq x-a \leq 2$$

$$a-2 \leq x \leq a+2$$

$$x^2+(a^2-5)x-5a^2 \leq 0 \text{ 에서}$$

$$(x+a^2)(x-5) \leq 0$$

$$-a^2 \leq x \leq 5$$

모든 자연수 a 에 대하여

$$-a^2 \leq a-2 \text{ 이므로}$$

주어진 연립부등식을 만족시키는 정수의 개수가

5가 되려면

$$a+2 \leq 5$$

$$1 \leq a \leq 3$$

자연수 a 는 1, 2, 3

따라서 모든 자연수 a 의 값의 합은 6

27. [출제의도] 다항식의 나눗셈을 활용하여

문제 해결하기

조건 (가)에 의하여

$$f(x)=(g(x)+x^2)x+g(x)-2x^2+4x$$

$$g(x)-2x^2+4x \text{ 의 차수는 } g(x)+x^2 \text{ 의 차수보다}$$

낮거나 $g(x)-2x^2+4x$ 는 상수이어야 하므로

$g(x)$ 는 최고차항의 계수가 2 인 이차식이다.

$$f(x)=g(x)(x+1)+x(x^2-2x+4) \text{ 이므로}$$

조건 (나)에 의하여 $x(x^2-2x+4)$ 는 $g(x)$ 로 나누어떨어진다.

$$g(x)=2(x^2-2x+4)$$

$$f(x)=2(x^2-2x+4)(x+1)+x(x^2-2x+4)$$

$$\text{따라서 } f(3)=77$$

28. [출제의도] 이차함수 추론하기

$$f(-2)<f(0) \text{ 이므로}$$

$$-2-k<-3k, k<1$$

$$k>0 \text{ 이므로 } 0<k<1 \dots \textcircled{1}$$

$A(-3, 0), B(k, 0), O(0, 0)$ 이라 하면

$$\overline{OA}=3, \overline{OB}=k, \overline{OC}=3k$$

$$\overline{AB}=\overline{OA}+\overline{OB}=3+k$$

직각삼각형 OCB 에서

$$\overline{BC}^2=\overline{OB}^2+\overline{OC}^2=k^2+(3k)^2=10k^2$$

직각삼각형 OAC 에서

$$\overline{AC}^2=\overline{OA}^2+\overline{OC}^2=3^2+(3k)^2=9+9k^2$$

삼각형 ABC 가 이등변삼각형이므로

$$\overline{AB}=\overline{BC} \text{ 또는 } \overline{AB}=\overline{AC} \text{ 또는 } \overline{AC}=\overline{BC}$$

(i) $\overline{AB}=\overline{BC}$ 인 경우

$$\overline{AB}^2=\overline{BC}^2$$

$$(3+k)^2=10k^2$$

$$9+6k+k^2=10k^2$$

$$3k^2-2k-3=0$$

$$k=\frac{1+\sqrt{10}}{3} \text{ 이므로 } \textcircled{1} \text{ 을 만족시키지}$$

않는다.

(ii) $\overline{AB}=\overline{AC}$ 인 경우

$$\overline{AB}^2=\overline{AC}^2$$

$$(3+k)^2=9+9k^2$$

$$9+6k+k^2=9+9k^2$$

$$8k^2-6k=2k(4k-3)=0$$

$$k=\frac{3}{4} \text{ 이므로 } \textcircled{1} \text{ 을 만족시킨다.}$$

(iii) $\overline{AC}=\overline{BC}$ 인 경우

$$\overline{AC}^2=\overline{BC}^2$$

$$9+9k^2=10k^2$$

$$k^2=9$$

$$k=3 \text{ 이므로 } \textcircled{1} \text{ 을 만족시키지 않는다.}$$

$$(i), (ii), (iii) \text{에 의하여 } k=\frac{3}{4}$$

$$\overline{AB}=3+k=\frac{15}{4}, \overline{OC}=3k=\frac{9}{4}$$

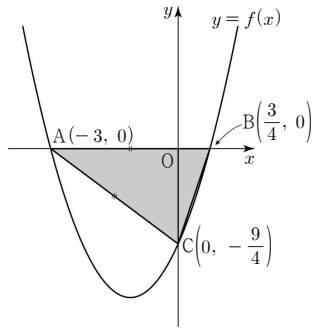
삼각형 ABC 의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times \overline{AB} \times \overline{OC} = \frac{1}{2} \times \frac{15}{4} \times \frac{9}{4} = \frac{135}{32}$$

$$p=32, q=135$$

$$\text{따라서 } p+q=167$$

[참고]



29. [출제의도] 조합을 활용하여 문제 해결하기

조건 (가), (나)에 의하여

$$b-a=1 \text{ 또는 } b-a=2$$

조건 (다)에 의하여 b, e 중 적어도 하나는 짝수이다.

(i) $b-a=1$ 인 경우

$$e-b \text{ 는 } 3, 4, 5, 6, 7$$

① $e-b=3$ 인 경우

$$a < a+1 < c < d < a+4$$

a 는 1, 2, 3, 4, 5 이므로 5 가지

순서쌍 (c, d) 의 개수는 ${}_2C_2 = 1$

순서쌍 (a, b, c, d, e) 의 개수는 $5 \times 1 = 5$

② $e-b=4$ 인 경우

$$a < a+1 < c < d < a+5$$

a 는 1, 3 이므로 2 가지

순서쌍 (c, d) 의 개수는 ${}_3C_2 = 3$

순서쌍 (a, b, c, d, e) 의 개수는 $2 \times 3 = 6$

③ $e-b=5$ 인 경우

$$a < a+1 < c < d < a+6$$

a 는 1, 2, 3 이므로 3 가지

순서쌍 (c, d) 의 개수는 ${}_4C_2 = 6$

순서쌍 (a, b, c, d, e) 의 개수는 $3 \times 6 = 18$

④ $e-b=6$ 인 경우

$$a < a+1 < c < d < a+7$$

a 는 1 이므로 1 가지

순서쌍 (c, d) 의 개수는 ${}_5C_2 = 10$

순서쌍 (a, b, c, d, e) 의 개수는

$$1 \times 10 = 10$$

⑤ $e-b=7$ 인 경우

$$a < a+1 < c < d < a+8$$

a 는 1 이므로 1 가지

순서쌍 (c, d) 의 개수는 ${}_6C_2 = 15$

순서쌍 (a, b, c, d, e) 의 개수는

$$1 \times 15 = 15$$

①~⑤에 의하여 순서쌍 (a, b, c, d, e) 의

$$\text{개수는 } 5+6+18+10+15=54$$

(ii) $b-a=2$ 인 경우

$$e-b \text{ 는 } 5, 6$$

① $e-b=5$ 인 경우

$$a < a+2 < c < d < a+7$$

a 는 1, 2 이므로 2 가지

순서쌍 (c, d) 의 개수는 ${}_4C_2 = 6$

순서쌍 (a, b, c, d, e) 의 개수는 $2 \times 6 = 12$

② $e-b=6$ 인 경우

$$a < a+2 < c < d < a+8$$

조건 (다)를 만족시키지 않는다.

①, ②에 의하여 순서쌍 (a, b, c, d, e) 의 개수는 12

(i), (ii)에 의하여 구하는 모든 순서쌍 (a, b, c, d, e) 의 개수는 $54+12=66$

30. [출제의도] 이차함수의 그래프와 직선의 위치 관계 추론하기

$$f(x)-2x=(x-a)^2+b-2x$$

$$=x^2-2(a+1)x+a^2+b$$

이차방정식 $f(x)-2x=0$ 의 판별식을 D_1 이라 하면

$$D_1=4(a+1)^2-4(a^2+b)$$

$$=8a-4b+4$$

$$g(x)-2x=(x-a-k)^2+b+2k-2x$$

$$=x^2-2(a+k+1)x+(a+k)^2+b+2k$$

이차방정식 $g(x)-2x=0$ 의 판별식을 D_2 라 하면

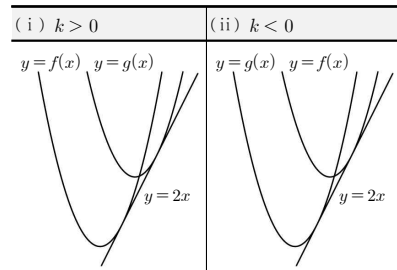
$$D_2=4(a+k+1)^2-4\{(a+k)^2+b+2k\}$$

$$=8a-4b+4$$

$D_1=D_2$ 이고 직선 $y=2x$ 가 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 와 만나서 서로 다른 모든 점의 개수가 2 이므로 직선 $y=2x$ 는 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 와 각각 한 점에서 만난다.

$$8a-4b+4=0 \cdots \textcircled{1}$$

실수 k 의 값의 범위에 따른 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 와 직선 $y=2x$ 의 개형은 다음과 같다.

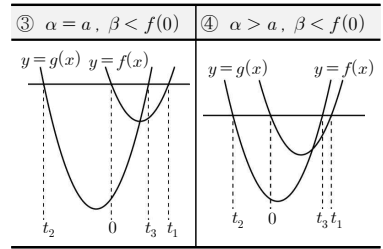
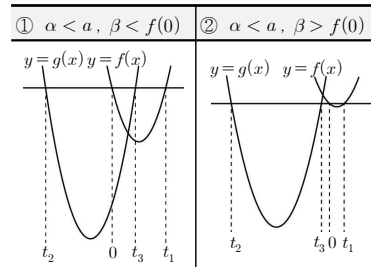


(i) $k > 0$ 인 경우

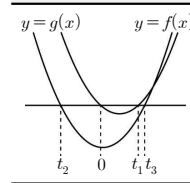
$t_2 > 0$ 이므로 조건 (가)를 만족시키지 않는다.

(ii) $k < 0$ 인 경우

두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 의 교점의 좌표를 (α, β) 라 하면 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 와 직선 $y=f(0)$ 의 개형은 다음과 같다.



⑤ $\alpha > a, \beta > f(0)$



②, ⑤인 경우는 조건 (가)를 만족시키지 않는다.

방정식 $f(x)-f(0)=0$ 에서

$$(x-a)^2+b-(a^2+b)=0$$

$$x^2-2ax=x(x-2a)=0$$

$$t_1=2a$$

방정식 $g(x)-f(0)=0$ 에서

$$(x-a-k)^2+b+2k-(a^2+b)=0$$

$$x^2-(2a+2k)x+k^2+2ak+2k=0$$

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$t_2+t_3=2a+2k$$

조건 (나)에 의하여

$$2a=2(2a+2k)$$

$$a=-2k \cdots \textcircled{2}$$

$$f(x)=(x+2k)^2+b$$

$$g(x)=(x+k)^2+b+2k$$

$h(x)=mx+n$ (단, m, n 은 실수)라 하자.

방정식 $g(x)-h(x)=0$ 에서

$$(x+k)^2+b+2k-(mx+n)=0$$

$$x^2+(2k-m)x+k^2+2k+b-n=0$$

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$-2k+m=2(a+k)$$

②에 의하여

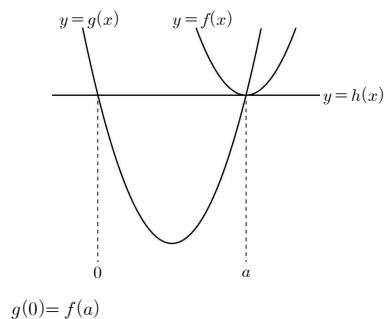
$$-2k+m=-2k$$

$$m=0$$

$h(x)=n$ 이므로 두 곡선 $y=f(x)$,

$y=g(x)$ 와 직선 $y=f(0)$ 의 개형은 ③의 경우이다.

두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 와 직선 $y=h(x)$ 의 개형은 다음과 같다.



$$k^2 + b + 2k = b$$

$$k^2 + 2k = k(k + 2) = 0$$

$$k < 0 \text{ 이므로 } k = -2$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{ 에 의하여 } a = 4, b = 9$$

$$f(x) = (x - 4)^2 + 9$$

$$g(x) = (x - 2)^2 + 5$$

$$\text{따라서 } f(-2) - g(-2) = 45 - 21 = 24$$