

● 수학 영역 ●

※ 본 전국연합학력평가는 16개 시도교육청 주관으로 시행되며, 문제지는 EBSi에서만 제공됩니다. 무단 전재 및 재배포는 금지됩니다.

정 답

1	②	2	①	3	②	4	⑤	5	④
6	①	7	③	8	④	9	⑤	10	③
11	②	12	④	13	③	14	①	15	④
16	69	17	15	18	7	19	62	20	27
21	3	22	202						

해 설

1. [출제의도] 지수를 계산하여 값을 구한다.

$$\sqrt[3]{2} \times 4^{-\frac{2}{3}} = 2^{\frac{1}{3}} \times (2^2)^{-\frac{2}{3}} = 2^{\frac{1}{3}} \times 2^{-\frac{4}{3}} = 2^{\frac{1}{3}-\frac{4}{3}} = \frac{1}{2}$$

2. [출제의도] 도함수를 이용하여 미분계수를 계산한다.

$$f'(x) = 3x^2 + 3 \text{ 이므로}$$
$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = f'(1) = 3 + 3 = 6$$

3. [출제의도] 등비수열의 정의를 이해하여 항의 값을 구한다.

등비수열 $\{a_n\}$ 의 공비를 r ($r > 0$)이라 하자.

$$\frac{a_2 a_3}{a_1 a_2} = \frac{a_1 r \times a_1 r^2}{a_1 \times a_1 r} = r^2 = \frac{2}{1} = 4, \quad r = 2$$

$$a_1 a_2 = a_1^2 \times 2 = \frac{1}{2}, \quad a_1^2 = \frac{1}{4}, \quad a_1 = \frac{1}{2} \quad (a_1 > 0)$$

$$\text{따라서 } a_4 = a_1 r^3 = \frac{1}{2} \times 2^3 = 4$$

4. [출제의도] 함수의 연속을 이해하여 상수의 값을 구한다.

$$f(x) \text{ 가 } x=a \text{ 에서 연속이므로 } \lim_{x \rightarrow a-} f(x) = f(a)$$

$$\lim_{x \rightarrow a-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a-} (x^2 - 3x) = a^2 - 3a, \quad f(a) = a - 4$$

$$\text{이므로 } a^2 - 3a = a - 4, \quad (a - 2)^2 = 0$$

$$\text{따라서 } a = 2$$

5. [출제의도] 곱의 미분법을 이용하여 미분계수를 계산한다.

$$f'(x) = x^2 + 3x + 1 + (x+1)(2x+3) \text{ 이므로}$$

$$f'(2) = 11 + 21 = 32$$

6. [출제의도] 삼각함수의 성질을 이해하여 삼각함수의 값을 구한다.

$$\tan^2 \theta = \frac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta} = 2, \quad \sin^2 \theta = 2 \cos^2 \theta$$

$$1 - \cos^2 \theta = 2 \cos^2 \theta, \quad \cos^2 \theta = \frac{1}{3}$$

$$\theta \text{ 는 제 2 사분면의 각이므로 } \cos \theta < 0$$

$$\text{따라서 } \cos \theta = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

7. [출제의도] 정적분을 이해하여 두 곡선 사이의 넓이를 구한다.

$$\frac{1}{2}x^2 + 2 > -\frac{1}{4}x^2 - 1 \text{ 이므로 구하는 부분의 넓이는}$$

$$\int_0^2 \left\{ \left(\frac{1}{2}x^2 + 2 \right) - \left(-\frac{1}{4}x^2 - 1 \right) \right\} dx$$

$$= \int_0^2 \left(\frac{3}{4}x^2 + 3 \right) dx = \left[\frac{1}{4}x^3 + 3x \right]_0^2 = 8$$

8. [출제의도] 로그의 성질을 이해하여 상수의 값을 구한다.

$$\log_a b = 2 \text{ 이므로 } b = a^2$$

$$\log_2 a + \log_4 b = \log_2 a + \log_4 a^2 = \log_2 a + \log_2 a = 8$$

$$\log_2 a = 4, \quad a = 2^4, \quad b = a^2 = (2^4)^2 = 2^8$$

$$\text{따라서 } \frac{b}{a} = \frac{2^8}{2^4} = 2^4 = 16$$

9. [출제의도] 함수의 극한의 성질을 이해하여 실수의 값을 구한다.

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)(x-3)}{(x-a)^2} = 5 \quad \cdots \cdots \text{㉠}$$

$$\text{이므로 } \lim_{x \rightarrow a} \{f(x)(x-3)\} = 0 \text{ 에서 } f(a)(a-3) = 0$$

(i) $a = 3$ 인 경우

$$\text{㉠에서 } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x)}{x-3} = 5 \text{ 이므로 } \lim_{x \rightarrow 3} f(x) = f(3) = 0$$

$$\text{그러므로 } f(x) = (x-3)(x-b) \text{ (} b \text{ 는 실수)이다.}$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)(x-3)}{(x-a)^2} = \lim_{x \rightarrow 3} (x-b) = 3-b=5, \quad b=-2$$

$$\text{이므로 } f(x) = (x-3)(x+2)$$

(ii) $a \neq 3$ 이고 $f(a) = 0$ 인 경우

$$f(x) = (x-a)(x-c) \text{ (} c \text{ 는 실수)이다.}$$

$$\text{㉠에서 } \lim_{x \rightarrow a} \frac{(x-c)(x-3)}{x-a} = 5 \text{ 이므로}$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \{(x-c)(x-3)\} = (a-c)(a-3) = 0, \quad a=c$$

$$\text{이다. 그러므로 } f(x) = (x-a)^2 \text{ 이고 ㉠에서}$$

$$\lim_{x \rightarrow a} (x-3) = a-3=5, \quad a=8$$

$$\text{그러므로 } f(x) = (x-8)^2$$

(i), (ii)에서 구하는 모든 실수 a 의 값은 3, 8

$$\text{따라서 } 3+8=11$$

10. [출제의도] 등차수열의 성질을 이해하여 자연수의 합을 구한다.

등차수열 $\{a_n\}$ 의 공차를 d 라 하자.

$$a_2 + a_9 = (18+d) + (18+8d) = 0 \text{ 이므로 } d = -4$$

$$S_k = \frac{k\{36+(k-1) \times (-4)\}}{2} = -2k^2 + 20k$$

$$|S_k| = 48 \text{ 에서 } S_k = 48 \text{ 또는 } S_k = -48$$

(i) $S_k = 48$ 인 경우

$$-2k^2 + 20k = 48, \quad k^2 - 10k + 24 = 0$$

$$(k-4)(k-6) = 0 \text{ 이므로 } k=4 \text{ 또는 } k=6$$

(ii) $S_k = -48$ 인 경우

$$-2k^2 + 20k = -48, \quad k^2 - 10k - 24 = 0$$

$$(k-12)(k+2) = 0, \quad k \text{ 가 자연수이므로 } k=12$$

(i), (ii)에서 구하는 모든 자연수 k 의 값은

$$4, 6, 12$$

$$\text{따라서 } 4+6+12=22$$

11. [출제의도] 정적분을 이용하여 점의 위치와 움직인 거리를 구하는 문제를 해결한다.

ㄱ. 시각 $t=4$ 에서 점 P의 운동 방향이 바뀌므로

$$v(4) = 16 - 4(a+5) + 8 = 0$$

$$-4a + 4 = 0, \quad a = 1 \text{ (참)}$$

$$\therefore v(t) = t^2 - 6t + 8 \text{ 이므로}$$

시각 $t=3$ 에서 점 P의 위치는

$$\int_0^3 (t^2 - 6t + 8) dt = \left[\frac{1}{3}t^3 - 3t^2 + 8t \right]_0^3 = 6 \text{ (참)}$$

$$\therefore v(t) = t^2 - 6t + 8 = (t-2)(t-4) \text{ 이므로}$$

시각 $t=0$ 에서 $t=4$ 까지 점 P가 움직인 거리는

$$\begin{aligned} \int_0^4 |v(t)| dt &= \int_0^2 v(t) dt + \int_2^4 (-v(t)) dt \\ &= \int_0^2 (t^2 - 6t + 8) dt + \int_2^4 (-t^2 + 6t - 8) dt \\ &= \left[\frac{1}{3}t^3 - 3t^2 + 8t \right]_0^2 + \left[-\frac{1}{3}t^3 + 3t^2 - 8t \right]_2^4 \\ &= 8 \text{ (거짓)} \end{aligned}$$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ

12. [출제의도] 지수함수의 성질을 이용하여 상수의 값을 구하는 문제를 해결한다.

$$A(k, a^k), B(k+2, a^{k+2}), C(k, a^{k-2}), D(k+2, a^k)$$

$$\overline{AC} = \overline{AD} \text{ 이고 } \overline{AD} = 2 \text{ 이므로 } \overline{AC} = 2$$

$$\overline{AC} + \overline{BD} = 6 \text{ 이므로 } \overline{BD} = 4$$

$$\frac{\overline{BD}}{\overline{AC}} = \frac{a^{k+2} - a^k}{a^k - a^{k-2}} = a^2 = \frac{4}{2} = 2, \quad a = \sqrt{2} \quad (a > 1)$$

$$\overline{AC} = 2 \text{ 에서}$$

$$(\sqrt{2})^k - (\sqrt{2})^{k-2} = 2, \quad (\sqrt{2})^{k-2} \times \{(\sqrt{2})^2 - 1\} = 2,$$

$$(\sqrt{2})^{k-2} = 2, \quad k=4$$

$$\text{따라서 } a \times k = 4\sqrt{2}$$

13. [출제의도] 도함수를 이용하여 함숫값을 구하는 문제를 해결한다.

$f'(0) = 1$ 이므로 다항함수 $f(x)$ 는 상수함수가 아니다.

함수 $f(x)$ 의 차수가 1 이면 함수 $(f'(x)+2)(f'(x)-2)$ 는 상수함수이므로 조건을 만족시키지 않는다.

함수 $f(x)$ 의 차수를 n ($n \geq 2$)라 하면

함수 $(f'(x)+2)(f'(x)-2)$ 의 차수는 $2n-2$ 이므로

$$n = 2n - 2, \quad n = 2$$

실수 a ($a \neq 0$), b , c 에 대하여

$$f(x) = ax^2 + bx + c \text{ 라 하면}$$

$$f'(x) = 2ax + b \text{ 이고 } f'(0) = 1 \text{ 이므로 } b = 1$$

$$(f'(x)+2)(f'(x)-2) = (2ax+3)(2ax-1)$$

$$= 4a^2x^2 + 4ax - 3$$

모든 실수 x 에 대하여

$$ax^2 + x + c = 4a^2x^2 + 4ax - 3 \text{ 이므로 } a = \frac{1}{4}, \quad c = -3$$

$$\text{따라서 } f(x) = \frac{1}{4}x^2 + x - 3 \text{ 이므로 } f(4) = 5$$

14. [출제의도] 사인법칙과 코사인법칙을 이용하여 도형에 관한 문제를 해결한다.

$$\cos(\angle DCB) = \frac{1}{3} \text{ 에서 } \sin(\angle DCB) = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

삼각형 BCD에서 사인법칙에 의해

$$\frac{\overline{BD}}{\sin(\angle DCB)} = 2 \times 3, \quad \overline{BD} = \boxed{4\sqrt{2}} \text{ 이므로}$$

(가)에 알맞은 수는 $4\sqrt{2}$

사각형 ABCD에서

$$\angle BAD = \pi - \angle DCB \text{ 이므로 } \cos(\angle BAD) = -\frac{1}{3}$$

$$\overline{AB} = 3k, \quad \overline{AD} = k \text{ (} k > 0 \text{)이라 하면}$$

삼각형 ABD에서 코사인법칙에 의해

$$(4\sqrt{2})^2 = (3k)^2 + k^2 - 2 \times 3k \times k \times \left(-\frac{1}{3}\right)$$

$$32 = 12k^2, \quad k = \frac{2\sqrt{6}}{3}$$

$$\overline{AD} = \boxed{\frac{2\sqrt{6}}{3}}, \quad \overline{AB} = 3 \times \boxed{\frac{2\sqrt{6}}{3}}$$

$$\text{이므로 (나)에 알맞은 수는 } \frac{2\sqrt{6}}{3}$$

삼각형 BCD에서 코사인법칙에 의해

$$(4\sqrt{2})^2 = \overline{CB}^2 + \overline{CD}^2 - 2 \times \overline{CB} \times \overline{CD} \times \frac{1}{3}$$

$$32 = \frac{4}{3}\overline{CB}^2, \quad \overline{CB} = \overline{CD} = \boxed{2\sqrt{6}}$$

$$\text{이므로 (다)에 알맞은 수는 } 2\sqrt{6}$$

$$\text{따라서 } p = 4\sqrt{2}, \quad q = \frac{2\sqrt{6}}{3}, \quad r = 2\sqrt{6} \text{ 이므로}$$

$$\frac{q \times r}{p} = \frac{\frac{2\sqrt{6}}{3} \times 2\sqrt{6}}{4\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

15. [출제의도] 접선의 방정식을 이용하여 함수를 추론한다.

곡선 $y = f(x)$ 위의 점 $(s, f(s))$ 에서의

접선의 방정식은 $y = f'(s)(x-s) + f(s)$

조건 (가)에서

$$f'(1) \times (x-1) + f(1) = f'(4) \times (x-4) + f(4)$$

가 x 에 대한 항등식이므로 곡선 $y = f(x)$ 위의

점 $(1, f(1))$ 에서의 접선과 점 $(4, f(4))$ 에서의 접선은

서로 같다.

이 접선의 방정식을 $y=mx+n$ 이라 하면

$$m=f'(1)=f'(4),$$

$$n=f(1)-f'(1)=f(4)-4f'(4)$$

$$h(x)=f(x)-(mx+n) \text{ 이라 하면}$$

$h(x)$ 는 최고차항의 계수가 1 인 사차함수이고

$$h'(x)=f'(x)-m$$

$$h(1)=f(1)-m-n=0,$$

$$h'(1)=f'(1)-m=0$$

이므로 $h(x)$ 는 $(x-1)^2$ 으로 나누어떨어지고,

$$h(4)=f(4)-4m-n=0,$$

$$h'(4)=f'(4)-m=0$$

이므로 $h(x)$ 는 $(x-4)^2$ 으로 나누어떨어진다.

그러므로 $h(x)=(x-1)^2(x-4)^2$ 이다.

$$\begin{aligned} f(x) &= (x-1)^2(x-4)^2+mx+n \\ &= x^4-10x^3+33x^2+(m-40)x+n+16 \end{aligned}$$

에서 $a=33, b=m-40, n=-16$ 즉,

$$f(x)=x^4-10x^3+33x^2+bx,$$

$$f'(x)=4x^3-30x^2+66x+b$$

조건 (나)에서 $g(0)=0$ 이므로 곡선 $y=f(x)$ 위의

점 $(\alpha, f(\alpha))$ 에서의 접선의 방정식이 $y=0$ 이 되는 실수 α 가 존재한다.

$$f(\alpha)=0, f'(\alpha)=0 \text{ 이므로}$$

$f(x)$ 는 $(x-\alpha)^2$ 으로 나누어떨어진다.

$\alpha=0$ 즉, $f'(0)=0$ 이면 $b=0$ 이고

$$f(x)=x^4-10x^3+33x^2=x^2(x^2-10x+33)$$

이때 $x^2-10x+33=(x-5)^2+8$ 이므로

$$f\left(\frac{7}{2}\right)>0 \text{ 이 되어 조건을 만족시키지 않는다.}$$

그러므로 $\alpha \neq 0$ 이다.

한편 $f(x)$ 는 x 로 나누어떨어지므로

$$f(x)=x(x-\alpha)^2(x-\beta) \ (\alpha \neq 0, \ \beta \neq 0) \text{ 이 되는}$$

실수 β 가 존재한다.

$$x^4-10x^3+33x^2+bx$$

$$=x(x-\alpha)^2(x-\beta)$$

$$=x^4-(2\alpha+\beta)x^3+(\alpha^2+2\alpha\beta)x^2-\alpha^2\beta x$$

에서 $2\alpha+\beta=10, \ \alpha^2+2\alpha\beta=33$ 이므로

$$\alpha^2+2\alpha(10-2\alpha)-33=0,$$

$$3\alpha^2-20\alpha+33=0,$$

$$(3\alpha-11)(\alpha-3)=0 \text{ 에서}$$

$$\alpha=\frac{11}{3} \text{ 또는 } \alpha=3$$

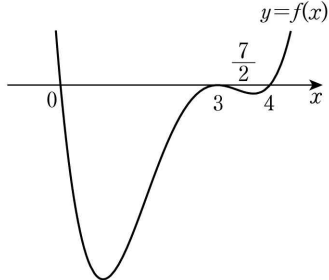
(i) $\alpha=\frac{11}{3}$ 인 경우

$$\beta=\frac{8}{3} \text{ 이므로 } f(x)=x\left(x-\frac{11}{3}\right)^2\left(x-\frac{8}{3}\right)$$

$$f\left(\frac{7}{2}\right)>0 \text{ 이므로 조건을 만족시키지 않는다.}$$

(ii) $\alpha=3$ 인 경우

$$\beta=4 \text{ 이므로 } f(x)=x(x-3)^2(x-4)$$



$$f\left(\frac{7}{2}\right)<0 \text{ 이므로 조건을 만족시킨다.}$$

$$\text{따라서 } f(5)=5 \times 2^2 \times 1=20$$

(i), (ii)에서 $f(5)=20$

16. [출제의도] $\sum$ 의 성질을 이용하여 수열의 합을 계산한다.

$$\sum_{k=1}^7(a_k+1)=\sum_{k=1}^7a_k+7=30 \text{ 이므로 } \sum_{k=1}^7a_k=23 \text{ 이다.}$$

$$\text{따라서 } \sum_{k=1}^73a_k=3 \times \sum_{k=1}^7a_k=3 \times 23=69$$

17. [출제의도] 부정적분을 이해하여 합숫값을 구한다.

$$\begin{aligned} F(x) &= \int f(x)dx \\ &= \int (3x^2+4x-1)dx \\ &= x^3+2x^2-x+C \quad (C \text{는 상수}) \end{aligned}$$

$$F(0)=1 \text{ 이므로 } C=1$$

$$F(x)=x^3+2x^2-x+1$$

$$\text{따라서 } F(2)=2^3+2 \times 2^2-2+1=15$$

18. [출제의도] 삼각함수의 그래프를 이해하여 합숫값을 구한다.

$$-1 \leq \sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right) \leq 1 \text{ 이고}$$

함수 $f(x)=4\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)+a$ 의 최솟값이 1 이므로

$$-4+a=1, \ a=5$$

따라서

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=4\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}\right)+5$$

$$=4\sin\frac{\pi}{6}+5$$

$$=4 \times \frac{1}{2}+5=7$$

19. [출제의도] 삼차함수의 그래프를 이해하여 합숫값을 구한다.

$$f'(x)=6ax^2-6ax=6ax(x-1)$$

$$f'(x)=0 \text{ 에서 } x=0 \text{ 또는 } x=1$$

(i) $a>0$ 인 경우

단한구간 $[0, 2]$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	...	1	...	2
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$	6	↘	$-a+6$	↗	$4a+6$

단한구간 $[0, 2]$ 에서 함수 $f(x)$ 는 $x=2$ 에서 최댓값 $4a+6$, $x=1$ 에서 최솟값 $-a+6$ 을 갖는다.

$$\text{그러므로 } 4a+6=8, \ -a+6=-2$$

이다. 두 방정식을 동시에 만족시키는 a 는

존재하지 않는다.

(ii) $a<0$ 인 경우

단한구간 $[0, 2]$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	...	1	...	2
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$	6	↗	$-a+6$	↘	$4a+6$

단한구간 $[0, 2]$ 에서 함수 $f(x)$ 는 $x=1$ 에서 최댓값 $-a+6$, $x=2$ 에서 최솟값 $4a+6$ 을 갖는다.

$$\text{그러므로 } -a+6=8, \ 4a+6=-2$$

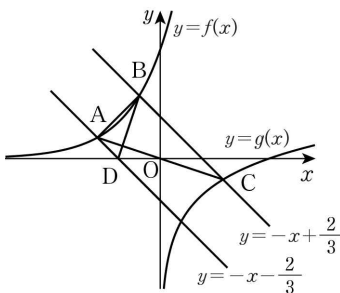
$$a=-2$$

(i), (ii)에서 $a=-2$ 이므로

$$f(x)=-4x^3+6x^2+6$$

$$\text{따라서 } f(-2)=-4 \times (-2)^3+6 \times (-2)^2+6=62$$

20. [출제의도] 지수함수와 로그함수의 그래프를 이용하여 상수의 값을 구하는 문제를 해결한다.



함수 $f(x)=\sqrt{3}a^x$ 의 역함수는 $g(x)=\log_a\frac{x}{\sqrt{3}}$ 이다.

두 직선 $y=-x-\frac{2}{3}, \ y=-x+\frac{2}{3}$ 가 평행하므로

$$\angle ABC+\angle DAB=180^\circ$$

삼각형 CBA와 삼각형 BAD가 서로 닮음이므로

$$\angle ABC=\angle DAB$$

그러므로

$$\angle ABC=\angle DAB=90^\circ$$

양수 k 에 대하여 점 A의 좌표를 $\left(-k-\frac{2}{3}, k\right)$ 라

$$\text{하면 } \overline{AD}=\sqrt{2}k$$

직선 AB의 기울기가 1 이므로

$$\text{점 B의 좌표는 } \left(-k, k+\frac{2}{3}\right)$$

$$\text{점 C의 좌표는 } \left(k+\frac{2}{3}, -k\right)$$

$$\overline{AB}=\frac{2\sqrt{2}}{3}, \ \overline{BC}=\left(2k+\frac{2}{3}\right)\sqrt{2}$$

삼각형 CBA와 삼각형 BAD가 서로 닮음이므로

$$\overline{AB}:\overline{BC}=\overline{DA}:\overline{AB}$$

$$\frac{2\sqrt{2}}{3}:\left(2k+\frac{2}{3}\right)\sqrt{2}=\sqrt{2}k:\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$4k^2+\frac{4}{3}k=\frac{8}{9},$$

$$9k^2+3k-2=0, \ (3k-1)(3k+2)=0$$

$$k>0 \text{ 이므로 } k=\frac{1}{3}$$

점 A $\left(-1, \frac{1}{3}\right)$ 이 곡선 $y=f(x)$ 위의 점이므로

$$\frac{1}{3}=\sqrt{3}a^{-1}, \ a=3\sqrt{3}$$

$$\text{따라서 } a^2=27$$

21. [출제의도] 정적분을 이용하여 함수를 추론한다.

최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$ 가

$x=2$ 에서 극솟값 $\frac{5}{2}$ 를 가지므로

$$f'(x)=3(x-\alpha)(x-2)$$

인 실수 α ($\alpha<2$)가 존재한다.

(i) $\alpha<0$ 인 경우

$t \geq 2$ 인 모든 실수 t 에 대하여

$$\int_0^t|f'(x)|dx$$

$$=\int_0^2(-f'(x))dx+\int_2^tf'(x)dx$$

$$=(-f(2)+f(0))+(f(t)-f(2))$$

$$=f(t)+f(0)-2f(2)$$

에서

$$f(t)+f(0)-2f(2)=f(t)+f(0), \ f(2)=0$$

$$\text{이므로 } f(2)=\frac{5}{2} \text{ 임에 모순이다.}$$

(ii) $0 \leq \alpha < 2$ 인 경우

$t \geq 2$ 인 모든 실수 t 에 대하여

$$\int_0^t|f'(x)|dx$$

$$=\int_0^\alpha f'(x)dx+\int_\alpha^2(-f'(x))dx+\int_2^tf'(x)dx$$

$$=(f(\alpha)-f(0))+(-f(2)+f(\alpha))+(f(t)-f(2))$$

$$=f(t)-f(0)+2f(\alpha)-2f(2)$$

에서

$$f(t)-f(0)+2f(\alpha)-2f(2)=f(t)+f(0),$$

$$f(\alpha)-f(2)=f(0)$$

$$f'(x)=3(x-\alpha)(x-2) \text{ 에서}$$

$$f(x)=x^3-\frac{3(\alpha+2)}{2}x^2+6\alpha x+f(0)$$

$$f(\alpha)-f(2)=f(0) \text{ 이므로}$$

$$\alpha^3-\frac{3(\alpha+2)}{2}\times\alpha^2+6\alpha\times\alpha+f(0)-\frac{5}{2}=f(0),$$

$$\alpha^3-6\alpha^2+5=0,$$

$$(\alpha-1)(\alpha^2-5\alpha-5)=0$$

$$\alpha=1 \text{ 또는 } \alpha=\frac{5-\sqrt{45}}{2} \text{ 또는 } \alpha=\frac{5+\sqrt{45}}{2}$$

$$0 \leq \alpha < 2 \text{ 이므로 } \alpha=1$$

(i), (ii)에서 $f(x)=x^3-\frac{9}{2}x^2+6x+f(0)$

$f(2)=2+f(0)=\frac{5}{2}$ 에서 $f(0)=\frac{1}{2}$ 이므로

$p=2$, $q=1$

따라서 $p+q=3$

22. [출제의도] 수열의 귀납적 정의를 이용하여 항의 값을 추론한다.

(i) a_3 이 짝수인 경우

$a_4=a_3+3$ 이고 이는 홀수이다.

$$a_5=\frac{1}{2}(a_4+1)+4=\frac{1}{2}a_3+6$$

a_5 가 홀수이면 $a_6=\frac{1}{2}(a_5+1)+5=\frac{1}{4}a_3+\frac{17}{2}$

$$a_3=\frac{1}{4}a_3+\frac{17}{2}$$

즉, $a_3=\frac{34}{3}$ 가 되어 a_3 이 자연수임에 모순이다.

a_5 가 짝수이면 $a_6=a_5+5=\frac{1}{2}a_3+11$

$$a_3=\frac{1}{2}a_3+11 \text{ 즉, } a_3=22$$

이때 $a_5=17$ 이 되어 a_5 가 짝수임에 모순이다.

(ii) a_3 이 홀수인 경우

① $a_3=8k-7$ (k 는 자연수)라 하자.

$$a_4=\frac{1}{2}(a_3+1)+3=4k,$$

$$a_5=a_4+4=4k+4,$$

$$a_6=a_5+5=4k+9$$

$$8k-7=4k+9 \text{ 즉, } k=4 \text{ 이므로 } a_3=25$$

a_2 가 짝수이면 $a_2+2=25$, $a_2=23$ 이 되어

a_2 가 짝수임에 모순이다.

a_2 가 홀수이면 $\frac{1}{2}(a_2+1)+2=25$, $a_2=45$

a_1 이 홀수이면 $\frac{1}{2}(a_1+1)+1=45$, $a_1=87$

a_1 이 짝수이면 $a_1+1=45$, $a_1=44$

따라서 $a_1=87$ 또는 $a_1=44$

② $a_3=8k-5$ (k 는 자연수)라 하자.

$$a_4=\frac{1}{2}(a_3+1)+3=4k+1,$$

$$a_5=\frac{1}{2}(a_4+1)+4=2k+5,$$

$$a_6=\frac{1}{2}(a_5+1)+5=k+8$$

$$8k-5=k+8 \text{ 즉, } k=\frac{13}{7} \text{ 이 되어}$$

k 가 자연수임에 모순이다.

④ $a_3=8k-3$ (k 는 자연수)라 하자.

$$a_4=\frac{1}{2}(a_3+1)+3=4k+2,$$

$$a_5=a_4+4=4k+6,$$

$$a_6=a_5+5=4k+11$$

$$8k-3=4k+11 \text{ 즉, } k=\frac{7}{2} \text{ 이 되어}$$

k 가 자연수임에 모순이다.

④ $a_3=8k-1$ (k 는 자연수)라 하자.

$$a_4=\frac{1}{2}(a_3+1)+3=4k+3,$$

$$a_5=\frac{1}{2}(a_4+1)+4=2k+6,$$

$$a_6=a_5+5=2k+11$$

$$8k-1=2k+11 \text{ 즉, } k=2 \text{ 이므로 } a_3=15$$

a_2 가 짝수이면 $a_2+2=15$, $a_2=13$ 이 되어

a_2 가 짝수임에 모순이다.

a_2 가 홀수이면 $\frac{1}{2}(a_2+1)+2=15$, $a_2=25$

a_1 이 홀수이면 $\frac{1}{2}(a_1+1)+1=25$, $a_1=47$

a_1 이 짝수이면 $a_1+1=25$, $a_1=24$

따라서 $a_1=47$ 또는 $a_1=24$

(i), (ii)에서 모든 a_1 의 값은

87, 44, 47, 24 이다.

따라서 $87+44+47+24=202$

[확률과 통계]

<i>23</i>	③	<i>24</i>	①	<i>25</i>	②	<i>26</i>	④	<i>27</i>	⑤
<i>28</i>	③	<i>29</i>	345	<i>30</i>	9				

23. [출제의도] 이항정리를 이용하여 항의 계수를 계산한다.

$$x^8=(x^2)^4 \text{ 이므로 } x^8 \text{ 의 계수는 } {}_6C_4\times 2^4\times \left(\frac{1}{2}\right)^{6-4}=60$$

24. [출제의도] 이항분포를 이해하여 미지수를 구한다.

$$E(X)=np=5, \text{ } V(X)=np(1-p)=5\times(1-p)=4$$

$$p=\frac{1}{5} \text{ 이므로 } n=25$$

25. [출제의도] 중복조합을 이해하여 경우의 수를 구한다.

$a+b+c=8-d^3$ ($0\leq d\leq 2$) 를 만족시키는 음이 아닌

정수 a, b, c 의 모든 순서쌍 (a, b, c) 의 개수는 ${}_3H_{8-d^3}$

(i) $d=0$ 인 경우

$$\text{구하는 순서쌍의 개수는 } {}_3H_8={}_{3+8-1}C_8={}_{10}C_2=45$$

(ii) $d=1$ 인 경우

$$\text{구하는 순서쌍의 개수는 } {}_3H_7={}_{3+7-1}C_7={}_9C_2=36$$

(iii) $d=2$ 인 경우

$$\text{구하는 순서쌍의 개수는 } 1$$

(i), (ii), (iii)에 의하여 구하는 모든 순서쌍의

개수는 $45+36+1=82$

26. [출제의도] 모평균의 신뢰구간을 이해하여 미지수와 표준편차를 구한다.

표본평균 $\bar{x}$ 를 이용하여 구한 모평균 m 에 대한

신뢰도 95%의 신뢰구간은

$$\bar{x}-1.96\times\frac{\sigma}{\sqrt{196}}\leq m\leq\bar{x}+1.96\times\frac{\sigma}{\sqrt{196}}$$

이므로

$$a+82=\bar{x}-1.96\times\frac{\sigma}{14}, \text{ } a+84=\bar{x}+1.96\times\frac{\sigma}{14}$$

$$(a+82)+(a+84)=\left(\bar{x}-1.96\times\frac{\sigma}{14}\right)+\left(\bar{x}+1.96\times\frac{\sigma}{14}\right)=2\bar{x}$$

$$\bar{x}=a+83$$

$$\bar{x}=2a+80 \text{ 에서 } 2a+80=a+83, \text{ } a=3$$

$$(a+84)-(a+82)=2\times 1.96\times\frac{\sigma}{14}, \text{ } \sigma=\frac{50}{7}$$

따라서

$$a\times\sigma=3\times\frac{50}{7}=\frac{150}{7}$$

27. [출제의도] 독립시행의 확률을 이해하여 확률을 구한다.

두 개의 주사위를 동시에 던져 나오는 경우의 수는

$$6\times 6=36$$

두 개의 주사위를 동시에 던져 나오는 두 눈의 수의 곱이 홀수인 사건을 A 라 하자.

두 수의 곱이 홀수가 되려면 두 수 모두 홀수이어야

$$\text{하므로 사건 } A \text{ 가 일어날 확률은 } \frac{3\times 3}{36}=\frac{1}{4}$$

이 시행을 4 번 반복한 후 주머니에 들어 있는 공의 개수가 5 이하가 되려면 4 번의 시행에서 사건 A 가 3 번 또는 4 번 일어나야 한다.

사건 A 가 3 번 일어날 확률은

$${}_4C_3\left(\frac{1}{4}\right)^3\left(\frac{3}{4}\right)^1=\frac{12}{256}$$

사건 A 가 4 번 일어날 확률은

$${}_4C_4\left(\frac{1}{4}\right)^4\left(\frac{3}{4}\right)^0=\frac{1}{256}$$

$$\text{따라서 구하는 확률은 } \frac{12}{256}+\frac{1}{256}=\frac{13}{256}$$

28. [출제의도] 같은 것이 있는 순열을 이용하여 경우의 수를 구하는 문제를 해결한다.

1 번째 자리에 숫자 2 또는 4가 적힌 카드를 놓을 수 있다.

1 번째 자리에 숫자 2가 적힌 카드를 놓는다고 하자.

(i) 나머지 5 개의 자리에 놓인 카드에 적힌 숫자가

a, a, b, c, d 인 경우

a 는 1 또는 3 또는 4 이므로

a 를 정하는 경우의 수는 ${}_3C_1=3$

b, c, d 는 1, 2, 3, 4 중 a 가 아닌 수이므로

b, c, d 를 정하는 경우의 수는 ${}_3C_3=1$

a, a, b, c, d 를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$$\frac{5!}{2!1!1!1!}=60$$

그러므로 이 경우의 수는 $3\times 1\times 60=180$

(ii) 나머지 5 개의 자리에 놓인 카드에 적힌 숫자가

a, a, b, b, c 인 경우

a, b 는 1 또는 3 또는 4 이므로

a, b 를 정하는 경우의 수는 ${}_3C_2=3$

c 는 1, 2, 3, 4 중 a, b 가 아닌 수이므로

c 를 정하는 경우의 수는 ${}_2C_1=2$

a, a, b, b, c 를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$$\frac{5!}{2!2!1!}=30$$

그러므로 이 경우의 수는 $3\times 2\times 30=180$

(i), (ii)에 의하여 1 번째 자리에 숫자 2가 적힌 카드를 놓을 때, 조건을 만족시키는 경우의 수는

$$180+180=360$$

마찬가지 방법으로 1 번째 자리에 숫자 4가 적힌

카드를 놓을 때, 조건을 만족시키는 경우의 수는 360

따라서 구하는 경우의 수는 $360+360=720$

29. [출제의도] 정규분포의 성질을 이용하여 확률을 추론한다.

함수 $f(x)$ 는 $x=m_1$ 에서 최댓값을 가지므로

조건 (가)에서 $m_1=4$

확률변수 X 와 Y 의 표준편차가 같으므로

곡선 $y=f(x)$ 와 곡선 $y=g(x)$ 의 모양이 같다.

곡선 $y=f(x)$ 는 직선 $x=m_1$ 에 대하여 대칭이고,

곡선 $y=g(x)$ 는 직선 $x=m_2$ 에 대하여 대칭이므로

조건 (나)에서 $|m_1-5|=|m_2-15|$

$m_1=4$ 이므로 $m_2=14$ 또는 $m_2=16$

곡선 $y=f(x)$ 는 직선 $x=4$ 에 대하여 대칭이므로

$$P(1\leq X\leq 2)+P(7\leq X\leq 9)$$

$$=P(6\leq X\leq 7)+P(7\leq X\leq 9)$$

$$=P(6\leq X\leq 9)$$

$$=P\left(\frac{6-4}{10}\leq Z\leq\frac{9-4}{10}\right)$$

$$=P(0.2\leq Z\leq 0.5)$$

$$=P(0\leq Z\leq 0.5)-P(0\leq Z\leq 0.2)=0.112$$

(i) $m_2=14$ 인 경우

$$P(11\leq Y\leq 14)=P\left(\frac{11-m_2}{10}\leq Z\leq\frac{14-m_2}{10}\right)$$

$$=P(-0.3\leq Z\leq 0)=0.118$$

(ii) $m_2=16$ 인 경우

$$P(11\leq Y\leq 14)=P\left(\frac{11-m_2}{10}\leq Z\leq\frac{14-m_2}{10}\right)$$

$$=P(-0.5\leq Z\leq -0.2)=0.112$$

(i), (ii)에 의하여 $m_2=16$

$$P(Y\geq 20)=P\left(Z\geq\frac{20-16}{10}\right)$$

$$=P(Z\geq 0.4)$$

$$=0.5-P(0\leq Z\leq 0.4)=0.345$$

$k=0.345$ 이므로 $1000\times k=345$

30. [출제의도] 조건부확률을 이용하여 확률을 구하는 문제를 해결한다.

$a_1=a_2=1$ 인 사건을 X , 두 번째 시행 후

주머니 B에 숫자 1이 적힌 공 3개가 들어 있는 사건을 Y 라 하자. n ($n=1, 2$) 번째 시행에서 두 주머니 A, B에서 꺼낸 공에 적힌 수를 각각 x_n, y_n 이라 하자. 사건 X 가 일어날 확률을 구하면 다음과 같다.

(i) $y_1=1, y_2=1$ 인 경우

모든 x_1, x_2 의 값에 대하여 $a_1=a_2=1$

$a_1=a_2=1$ 일 확률은 $\left(\frac{5}{5}\times\frac{4}{5}\right)\times\left(\frac{4}{4}\times\frac{3}{4}\right)=\frac{3}{5}$

(ii) $y_1=1, y_2=2$ 인 경우

모든 x_1 의 값에 대하여 $a_1=1$

$a_2=1$ 이므로 $x_2=1$

$x_1=1, x_2=1$ 일 확률은 $\left(\frac{3}{5}\times\frac{4}{5}\right)\times\left(\frac{2}{4}\times\frac{1}{4}\right)=\frac{3}{50}$

$x_1=2, x_2=1$ 일 확률은 $\left(\frac{2}{5}\times\frac{4}{5}\right)\times\left(\frac{3}{4}\times\frac{1}{4}\right)=\frac{3}{50}$

$a_1=a_2=1$ 일 확률은 $\frac{3}{50}+\frac{3}{50}=\frac{3}{25}$

(iii) $y_1=2, y_2=1$ 인 경우

$a_1=1$ 이므로 $x_1=1$

모든 x_2 의 값에 대하여 $a_2=1$

$a_1=a_2=1$ 일 확률은 $\left(\frac{3}{5}\times\frac{1}{5}\right)\times\left(\frac{4}{4}\times\frac{4}{4}\right)=\frac{3}{25}$

(i), (ii), (iii)에서

$P(X)=\frac{3}{5}+\frac{3}{25}+\frac{3}{25}=\frac{21}{25}$

$a_1=a_2=1$ 이고 두 번째 시행 후 주머니 B에 숫자 1이 적힌 공 3개가 들어 있는 경우는

(ii), (iii)이므로 $P(X\cap Y)=\frac{3}{25}+\frac{3}{25}=\frac{6}{25}$

그러므로 구하는 확률은

$P(Y|X)=\frac{P(X\cap Y)}{P(X)}=\frac{\frac{6}{25}}{\frac{21}{25}}=\frac{2}{7}$

$p=7, q=2$ 이므로 $p+q=9$

[미적분]

<i>23</i>	⑤	<i>24</i>	①	<i>25</i>	②	<i>26</i>	③	<i>27</i>	④
<i>28</i>	③	<i>29</i>	155	<i>30</i>	29				

23. [출제의도] 로그함수의 극한값을 계산한다.

$$\lim_{x\rightarrow 0}\frac{\ln(1+5x^2)}{2x^2}=\lim_{x\rightarrow 0}\left(\frac{\ln(1+5x^2)}{5x^2}\times\frac{5}{2}\right)$$
$$=\frac{5}{2}\times\lim_{x\rightarrow 0}\frac{\ln(1+5x^2)}{5x^2}=\frac{5}{2}\times 1=\frac{5}{2}$$

24. [출제의도] 적분법을 이해하여 적분값을 구한다.

$$\int_1^2\frac{x+1}{x^2}dx=\int_1^2\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)dx=\left[\ln x-\frac{1}{x}\right]_1^2=\ln 2+\frac{1}{2}$$

25. [출제의도] 수열의 극한의 대소 관계를 이해하여 미지수의 값을 구한다.

$(k\times a_n-n^2)^2< n^2$ 에서 $-n< k\times a_n-n^2< n$

$k>0$ 이므로 $\frac{n^2-n}{k}< a_n<\frac{n^2+n}{k}$

$\frac{1}{k}\times\frac{n^2-n}{4n^2+1}<\frac{a_n}{4n^2+1}<\frac{1}{k}\times\frac{n^2+n}{4n^2+1}$

$$\lim_{n\rightarrow\infty}\left(\frac{1}{k}\times\frac{n^2-n}{4n^2+1}\right)=\frac{1}{k}\times\lim_{n\rightarrow\infty}\frac{1-\frac{1}{n}}{4+\frac{1}{n^2}}=\frac{1}{4k},$$

$$\lim_{n\rightarrow\infty}\left(\frac{1}{k}\times\frac{n^2+n}{4n^2+1}\right)=\frac{1}{k}\times\lim_{n\rightarrow\infty}\frac{1+\frac{1}{n}}{4+\frac{1}{n^2}}=\frac{1}{4k}$$

이므로 수열의 극한의 대소 관계에 의하여

$$\lim_{n\rightarrow\infty}\frac{a_n}{4n^2+1}=\frac{1}{4k},\frac{1}{4k}=k$$

$k>0$ 이므로 $k=\frac{1}{2}$

26. [출제의도] 적분법을 이해하여 입체도형의 부피를

구한다.

x 좌표가 t ($1\leq t\leq e$)인 점을 지나고 x 축에 수직인 평면으로 입체도형을 자른 단면의 넓이 $S(t)$ 는

$$S(t)=\frac{\pi}{2}\times\left(\frac{\sqrt{1+(\ln t)^2}}{2}\right)^2=\frac{\pi}{8}((\ln t)^2+1)$$

구하는 입체도형의 부피는

$$\int_1^eS(t)dt=\frac{\pi}{8}\int_1^e((\ln t)^2+1)dt$$
$$=\frac{\pi}{8}\left(\int_1^e1\times(\ln t)^2dt+\int_1^e1dt\right)$$
$$=\frac{\pi}{8}\left(\left[t(\ln t)^2\right]_1^e-\int_1^e2\times\ln tdt+\int_1^e1dt\right)$$
$$=\frac{\pi}{8}\left(e-\left[2t\ln t\right]_1^e+\int_1^e2dtd+\int_1^e1dt\right)$$
$$=\frac{\pi}{8}\left(-e+\left[3t\right]_1^e\right)=\frac{(2e-3)\pi}{8}$$

27. [출제의도] 미분법을 이해하여 역함수의 미분계수를 구한다.

함수 $f(x)$ 가 $x=b$ 에서 연속이므로

$\lim_{x\rightarrow b-}(e^{2x}-2)=\lim_{x\rightarrow b+}(2e^x-8e^{-x}+a)$

$e^{2b}-2=2e^b-8e^{-b}+a\cdots\cdots$ ㉠

함수 $f(x)$ 가 $x=b$ 에서 미분가능하므로

$$\lim_{h\rightarrow 0-}\frac{f(b+h)-f(b)}{h}=2e^{2b}$$

$$\lim_{h\rightarrow 0+}\frac{f(b+h)-f(b)}{h}=2e^b+8e^{-b}$$
에서

$2e^{2b}=2e^b+8e^{-b}, (e^b-2)(e^{2b}+e^b+2)=0$

$e^b=2$ 이므로 $b=\ln 2$

㉠에 $b=\ln 2$ 를 대입하면 $a=2$

$g'(8)=\frac{1}{f'(g(8))}$ 에서 $g(8)=\alpha$ 라 하면 $f(\alpha)=8$

함수 $f(x)$ 는 실수 전체의 집합에서 증가하고

$f(\ln 2)=2e^{\ln 2}-8e^{-\ln 2}+2=2$ 이므로 $\alpha>\ln 2$

$f(\alpha)=2e^\alpha-8e^{-\alpha}+2=8$ 에서

$e^{2\alpha}-3e^\alpha-4=0, (e^\alpha-4)(e^\alpha+1)=0$

$e^\alpha=4$ 이므로 $\alpha=\ln 4$

$f'(\ln 4)=2e^{\ln 4}+8e^{-\ln 4}=10$ 이므로

$g'(8)=\frac{1}{f'(\ln 4)}=\frac{1}{10}$

28. [출제의도] 미분법을 이용하여 미분계수를 구하는 문제를 해결한다.

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(s, f(s))$ 에서의

접선 l 의 방정식은 $y=f'(s)(x-s)+f(s)$

$f(x)=x\tan x-\ln(\sec x)$ 에서

$f'(x)=x\sec^2x, f''(x)=\sec^2x(1+2x\tan x)$

접선 l 의 기울기가 $\frac{s}{t}$ 이므로 $f'(s)=\frac{s}{t}$

$s\sec^2s=\frac{s}{t}, t=\cos^2s$

$t=\cos^2s$ 의 양변을 t 에 대하여 미분하면

$1=-2\sin s\cos s\times\frac{ds}{dt}, \frac{ds}{dt}=\frac{1}{-2\sin s\cos s}$

직선 l 의 y 절편은 $-sf'(s)+f(s)$ 이므로

$g(t)=-sf'(s)+f(s), g'(t)=-sf''(s)\times\frac{ds}{dt}$

$t=\cos^2s$ ($0<s<\frac{\pi}{2}$)에서 $t=\frac{1}{2}$ 일 때 $s=\frac{\pi}{4}$

$s=\frac{\pi}{4}$ 일 때, $f''\left(\frac{\pi}{4}\right)=\pi+2, \frac{ds}{dt}=-1$ 이므로

$g'\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{\pi}{4}\times f''\left(\frac{\pi}{4}\right)\times\frac{ds}{dt}=\frac{\pi^2+2\pi}{4}$

29. [출제의도] 등비급수를 이용하여 급수의 값을 구하는 문제를 해결한다.

조건 (나)에서 급수 $\sum_{n=k}^{\infty}b_n$ 이 수렴하므로 $-1< r < 1$

조건 (가)에서 $r=\frac{b_4}{b_3}=\frac{a_{k+27}}{a_k}$ 이므로 r 은 유리수이다.

$b_3=72r^2=2^3\times 3^2\times r^2, b_4=72r^3=2^3\times 3^2\times r^3$ 이고

b_3, b_4 의 값이 모두 정수이므로 $r=\frac{1}{2}$ 또는 $r=-\frac{1}{2}$
등차수열 $\{a_n\}$ 의 공차를 d 라 하자.

(i) $r=\frac{1}{2}$ 인 경우

$b_3=18, b_4=9$ 이므로 조건 (가)에서

$a_{k+27}-a_k=b_4-b_3, 27d=-9, d=-\frac{1}{3}$

d 는 정수이므로 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $r=-\frac{1}{2}$ 인 경우

$b_3=18, b_4=-9$ 이므로 조건 (가)에서

$a_{k+27}-a_k=b_4-b_3, 27d=-27, d=-1$

(i), (ii)에 의하여 $d=-1, r=-\frac{1}{2}$

조건 (가)에서 $a_{k+15}=a_k+15d=b_3+15d=3$

조건 (나)에서

$$\frac{72\times\left(-\frac{1}{2}\right)^{k-1}}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)}=3, \left(-\frac{1}{2}\right)^{k-1}=\frac{1}{16}, k=5$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{k^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{72\times\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}}{5^n}$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{72}{5}\times\left(-\frac{1}{10}\right)^{n-1}$$
$$=\frac{\frac{72}{5}}{1-\left(-\frac{1}{10}\right)}=\frac{144}{11}$$

$p=11, q=144$ 이므로 $p+q=155$

30. [출제의도] 적분법을 이용하여 함수를 추론한다.

$g(f(x))=(-\sin(ax)+1)^2=(\sin(ax)-1)^2$ 에서

$g'(f(x))f'(x)=2a(\sin(ax)-1)\cos(ax)$

$a>0$ 이고 $\sin(ax)-1\leq 0$ 이므로

$\cos(ax)\leq 0$ 일 때 $|g'(f(x))f'(x)|=g'(f(x))f'(x)$

$\cos(ax)\geq 0$ 일 때 $|g'(f(x))f'(x)|=-g'(f(x))f'(x)$

$0\leq x\leq\frac{\pi}{2a}$ 에서 $\cos(ax)\geq 0$ 이므로

$$\int_0^{\frac{\pi}{2a}}|g'(f(x))f'(x)|dx$$
$$=-\int_0^{\frac{\pi}{2a}}g'(f(x))f'(x)dx$$
$$=-\int_0^{\frac{\pi}{2a}}(g(f(x)))'dx$$
$$=-\left[g(f(x))\right]_0^{\frac{\pi}{2a}}=g(f(0))-g\left(f\left(\frac{\pi}{2a}\right)\right)=1$$
$$\frac{\pi}{2a}\leq x\leq\frac{\pi}{a}\text{에서 }\cos(ax)\leq 0\text{이므로}$$

$$\int_{\frac{\pi}{2a}}^{\frac{\pi}{a}}|g'(f(x))f'(x)|dx$$
$$=\int_{\frac{\pi}{2a}}^{\frac{\pi}{a}}g'(f(x))f'(x)dx$$
$$=\int_{\frac{\pi}{2a}}^{\frac{\pi}{a}}(g(f(x)))'dx$$
$$=\left[g(f(x))\right]_{\frac{\pi}{2a}}^{\frac{\pi}{a}}=g\left(f\left(\frac{\pi}{a}\right)\right)-g\left(f\left(\frac{\pi}{2a}\right)\right)=1$$

실수 t 에 대한 함수 $\int_0^t|g'(f(x))f'(x)|dx$ 는 실수 전체의 집합에서 증가한다.

$\int_0^{\frac{\pi}{2a}}|g'(f(x))f'(x)|dx=1, \int_0^{\frac{\pi}{a}}|g'(f(x))f'(x)|dx=2$

이고 $\int_0^{2\pi}|g'(f(x))f'(x)|dx=\frac{5}{4}$ 이므로 $\frac{\pi}{2a}<2\pi<\frac{\pi}{a}$

즉 $\frac{1}{4}<a<\frac{1}{2}$

$$\int_0^{2\pi}|g'(f(x))f'(x)|dx$$

$p=3, \ q=40 \circ | \text{므로 } p+q=43 \qquad |$