

2026학년도 10월 고2 전국연합학력평가

정답 및 해설

• 2교시 수학 영역 •

※ 본 전국연합학력평가는 16개 시도교육청 주관으로 시행되며, 문제지는 EBSi에서만 제공됩니다. 무단 전재 및 재배포는 금지됩니다.

1	③	2	①	3	⑤	4	④	5	②
6	④	7	⑤	8	②	9	③	10	③
11	②	12	⑤	13	①	14	③	15	⑤
16	⑤	17	②	18	①	19	③	20	④
21	①	22	20	23	6	24	3	25	11
26	69	27	9	28	35	29	30	30	157

1. [출제의도] 상용로그 계산하기

$\log 20 + \log 50 = \log (20 \times 50) = \log 10^3 = 3$

2. [출제의도] 함수의 극한 계산하기

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt{x+11}-3}{x+2}$$
$$= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(\sqrt{x+11}-3)(\sqrt{x+11}+3)}{(x+2)(\sqrt{x+11}+3)}$$
$$= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x+2}{(x+2)(\sqrt{x+11}+3)}$$
$$= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{1}{\sqrt{x+11}+3} = \frac{1}{6}$$

3. [출제의도] 삼각함수의 성질 이해하기

$\cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = -\sin \theta = \frac{4}{5}$

4. [출제의도] 함수의 극한 이해하기

$\lim_{x \rightarrow 0-} f(x) + \lim_{x \rightarrow 1+} f(x) = 2 + 0 = 2$

5. [출제의도] 로그함수의 그래프 이해하기

함수 $y = \log_2\left(x - \frac{1}{2}\right) + 3$ 의 그래프의

접근선의 방정식은 $x = \frac{1}{2}$

따라서 구하는 점의 y 좌표는 $9^{\frac{1}{2}} + 4 = 7$

6. [출제의도] 수열의 귀납적 정의 이해하기

$a_1 = 3$

$a_2 = \frac{1}{a_1 - 2}$ 이므로 $a_2 = 1$

$a_3 = \frac{1}{a_2 - 2}$ 이므로 $a_3 = -1$

$a_4 = \frac{1}{a_3 - 2}$ 이므로 $a_4 = -\frac{1}{3}$

7. [출제의도] 사잇값 정리 이해하기

함수 $f(x)$ 가 두 닫힌구간 $[1, 3]$, $[5, 7]$ 에서 연속이고 $f(1) \times f(3) < 0$, $f(5) \times f(7) < 0$ 이므로 사잇값 정리에 의하여 방정식 $f(x) = 0$ 이 두 열린구간 $(1, 3)$, $(5, 7)$ 에서 각각 적어도 하나의 실근을 갖는다.

방정식 $f(x) = 0$ 의 실근이 서로 다른 두 정수뿐이므로 $m = 2$, $n = 6$ 또는 $m = 6$, $n = 2$

따라서 $m \times n = 2 \times 6 = 12$

8. [출제의도] 삼각형의 넓이 이해하기

$\sin(B + C) = \sin(\pi - A) = \sin A$ 이므로 $\sin A = \frac{1}{3}$

따라서 삼각형 ABC의 넓이는

$\frac{1}{2} \times \overline{AB} \times \overline{AC} \times \sin A = \frac{1}{2} \times 6 \times 2 \times \frac{1}{3} = 2$

9. [출제의도] 지수함수의 성질을 활용하여 문제해결하기

(i) $a > 1$ 일 때

함수 $f(x) = a^{x-1}$ 의 밑이 1보다 크므로
함수 $f(x)$ 는 $x = 3$ 에서 최솟값을 갖는다.

그런데 $f(3) = a^2 > \frac{1}{16}$ 이므로

함수 $f(x)$ 의 최솟값이 $\frac{1}{16}$ 이 되도록 하는

a 의 값이 존재하지 않는다.

(ii) $0 < a < 1$ 일 때

함수 $f(x) = a^{x-1}$ 의 밑이 1보다 작으므로
함수 $f(x)$ 는 $x = 5$ 에서 최솟값을 갖는다.

$f(5) = a^4 = \frac{1}{16}$ 에서 $a = \frac{1}{2}$

함수 $f(x)$ 는 $x = 3$ 에서 최댓값을 가지므로

함수 $f(x)$ 의 최댓값은 $f(3) = a^2 = \frac{1}{4}$

(i), (ii)에 의하여 함수 $f(x)$ 의 최댓값은 $\frac{1}{4}$

10. [출제의도] 연속함수의 성질 이해하기

함수 $(f(x))^2$ 이 실수 전체의 집합에서 연속이므로
 $x = 4$ 에서 연속이다.

$$(f(4))^2 = \lim_{x \rightarrow 4-} (f(x))^2$$
$$= \lim_{x \rightarrow 4-} (x+k)^2 = k^2 + 8k + 16,$$

$\lim_{x \rightarrow 4+} (f(x))^2 = \lim_{x \rightarrow 4+} (2x+k)^2 = k^2 + 16k + 64$ 이므로

$k^2 + 8k + 16 = k^2 + 16k + 64$, $8k = -48$

따라서 $k = -6$

11. [출제의도] 로그의 성질을 활용하여 문제해결하기

$\log_b a = \frac{1}{\log_a b}$ 이므로 $4\log_a b + \frac{1}{\log_a b} = 4$

$4(\log_a b)^2 - 4\log_a b + 1 = (2\log_a b - 1)^2 = 0$

$\log_a b = \frac{1}{2}$, $a^{\frac{1}{2}} = b$ 에서 $a = b^2$

따라서 $\log_{a^3b} ab = \log_{b^3} b^3 = \frac{3}{7}\log_b b = \frac{3}{7}$

12. [출제의도] 미분가능성 이해하기

함수 $f(x)$ 가 $x = 1$ 에서 미분가능하므로

함수 $f(x)$ 는 $x = 1$ 에서 연속이다.

$f(1) = \lim_{x \rightarrow 1-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1-} \{a(x-1) + b\} = b$,

$\lim_{x \rightarrow 1+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1+} \{(x-1)(x^2+b)^2 + 2\} = 2$ 이므로

$b = 2$

또한 함수 $f(x)$ 는 $x = 1$ 에서 미분가능하므로

$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$ 의 값이 존재한다.

$\lim_{x \rightarrow 1-} \frac{a(x-1)}{x-1} = a$, $\lim_{x \rightarrow 1+} \frac{(x-1)(x^2+2)^2}{x-1} = 9$ 이므로

$a = 9$

따라서 $a + b = 11$

13. [출제의도] 등차수열을 활용하여 문제해결하기

등차수열 $\{a_n\}$ 의 공차를 d 라 하자.

조건에 의하여 네 수 a_1 , a_3 , b_1 , b_2 는 이 순서대로
공차가 $2d$ 인 등차수열을 이루므로 등차수열 $\{b_n\}$ 의
공차는 $2d$ 이다.

$b_1 = a_3 + 2d = a_5$ 이므로 $b_3 = a_5 + 2 \times 2d = a_9$

$b_3 - a_6 = a_9 - a_6 = 3d$ 이고 $a_6 = 8$, $b_3 = 2$ 이므로

$3d = -6$, $d = -2$

$a_1 = a_6 - 5d = 18$, $b_5 = b_3 + 2 \times 2d = -6$

따라서 $a_1 + b_5 = 18 + (-6) = 12$

14. [출제의도] 일반각과 호도법의 뜻 이해하기

$0 < \theta < 2\pi$ 인 θ 에 대하여 각 θ 가 제3사분면의

각이므로 $\pi < \theta < \frac{3\pi}{2}$

$3\pi < 3\theta < \frac{9\pi}{2}$ 이고 각 3θ 가 제4사분면의 각이므로

$\frac{7\pi}{2} < 3\theta < 4\pi$, $\frac{7\pi}{6} < \theta < \frac{4\pi}{3}$

따라서 $a + b = \frac{7\pi}{6} + \frac{4\pi}{3} = \frac{5\pi}{2}$

15. [출제의도] 사인법칙과 코사인법칙을 활용하여 문제해결하기

$4\cos^2 C - \cos^2 B = 3$

$4(1 - \sin^2 C) - (1 - \sin^2 B) = 3$

$\sin^2 B = 4\sin^2 C$, $\sin B = 2\sin C$

삼각형 ABC에서 사인법칙에 의하여

$\frac{\overline{AB}}{\sin C} = \frac{\overline{AC}}{\sin B}$, $\overline{AB} : \overline{AC} = 1 : 2$

조건 (가)에 의하여 $\overline{AB} : \overline{BC} : \overline{AC} = 3 : 5 : 6$ 이므로

어떤 양수 t 에 대하여

$\overline{AB} = 3t$, $\overline{BC} = 5t$, $\overline{AC} = 6t$ 이다.

삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$\cos B = \frac{(5t)^2 + (3t)^2 - (6t)^2}{2 \times 5t \times 3t} = -\frac{1}{15}$

$\sin B = \sqrt{1 - \left(-\frac{1}{15}\right)^2} = \frac{4\sqrt{14}}{15}$

삼각형 ABC에서 사인법칙에 의하여

$\frac{\overline{AC}}{\frac{4\sqrt{14}}{15}} = 2 \times \sqrt{14}$

따라서 선분 AC의 길이는 $\frac{112}{15}$

16. [출제의도] 함수의 극한의 성질을 활용하여 문제해결하기

점 A의 x 좌표가 $t(t > 0)$ 이므로 점 A를 중심으로
하고 y 축에 접하는 원의 반지름의 길이는 t 이다.

점 B가 이 원 위의 점이므로

$(2t^3 + 3t^2 + 1) - t \leq f(t) \leq (2t^3 + 3t^2 + 1) + t$

$t > 0$ 인 모든 실수 t 에 대하여

$\frac{2t^3 + 3t^2 - t + 1}{t^3} \leq \frac{f(t)}{t^3} \leq \frac{2t^3 + 3t^2 + t + 1}{t^3}$ 이고

$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{2t^3 + 3t^2 - t + 1}{t^3} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{2t^3 + 3t^2 + t + 1}{t^3} = 2$

이므로 함수의 극한의 대소 관계에 의하여

$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{f(t)}{t^3} = 2$

이때 $\lim_{t \rightarrow \infty} \left(\frac{f(t)}{t^2} - at \right) = b$ 이므로

$\lim_{t \rightarrow \infty} \left(\frac{f(t)}{t^3} - a \right) = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\left(\frac{f(t)}{t^2} - at \right) \times \frac{1}{t} \right)$
 $= b \times 0 = 0$

$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{f(t)}{t^3} = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\left(\frac{f(t)}{t^3} - a \right) + a \right)$
 $= 0 + a = a = 2$

$t > 0$ 인 모든 실수 t 에 대하여

$\frac{3t^2 - t + 1}{t^2} \leq \frac{f(t)}{t^2} - 2t \leq \frac{3t^2 + t + 1}{t^2}$ 이고

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{3t^2 - t + 1}{t^2} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{3t^2 + t + 1}{t^2} = 3$$

이므로 함수의 극한의 대소 관계에 의하여

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left(\frac{f(t)}{t^2} - 2t \right) = b = 3$$

따라서 $a + b = 5$

17. [출제의도] 지수함수와 로그함수를 활용하여 문제 해결하기

ㄱ. $f^{-1}(2) = a$, $f^{-1}(4) = b$ 라 하자.

$$f(a) = 2^{-a+3} = 2^1 \text{에서 } a = 2$$

$$f(b) = 2^{-b+3} = 4 = 2^2 \text{에서 } b = 1$$

그러므로 $f^{-1}(2) + f^{-1}(4) = 3$ (참)

ㄴ. $y = 2^{-x+3}$ 에서

$$-x + 3 = \log_2 y, \quad x = -\log_2 y + 3 \text{이므로}$$

$$f^{-1}(x) = -\log_2 x + 3$$

$$\begin{aligned} g(x) &= (g \circ f)(f^{-1}(x)) \\ &= 2(-\log_2 x + 3) - 1 \\ &= -2\log_2 x + 5 \end{aligned}$$

$$g(x) \leq 0 \text{에서 } 2\log_2 x \geq 5, \quad \log_2 x \geq \log_2 2^{\frac{5}{2}}$$

로그의 밑이 1보다 크므로 $x \geq 4\sqrt{2}$ (참)

$$\begin{aligned} \text{ㄷ. } (f \circ g)(x) &= 2^{-(2\log_2 x + 5) + 3} \\ &= 2^{-2 + 2\log_2 x} \\ &= 2^{-2} \times 2^{\log_2 x^2} = \frac{1}{4} x^2 \end{aligned}$$

$$\text{에서 } (f \circ g)(x) \leq 6, \quad x^2 \leq 24$$

그러므로 부등식을 만족시키는 자연수는

1, 2, 3, 4로 개수가 4이다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ

18. [출제의도] 수열의 합을 활용하여 문제해결하기

$$a_1 = S_1 = 1$$

2 이상의 자연수 n 에 대하여

$$\begin{aligned} a_{2n-1} &= S_{2n-1} - S_{2n-2} \\ &= (2n-1)^2 - (4n-3) \\ &= 4(n-1)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{따라서 } \sum_{k=1}^8 a_{2k-1} &= a_1 + \sum_{k=2}^8 a_{2k-1} \\ &= 1 + \sum_{k=2}^8 4(k-1)^2 \\ &= 1 + 4(1^2 + 2^2 + \cdots + 7^2) \\ &= 1 + 4 \times \frac{7 \times 8 \times 15}{6} = 561 \end{aligned}$$

19. [출제의도] 함수의 극한을 이용하여 추론하기

삼차다항식 $f(x)$ 의 최고차항의 계수가 2이고

$f(x)$ 를 x^2 으로 나눈 몫이 $Q(x)$,

나머지가 $R(x)$ 이므로

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 Q(x) + R(x), \quad Q(x) = 2x + a (a \text{는 상수}), \\ R(x) &= bx + c (b, c \text{는 상수}) \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{R(x)}{Q(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{bx + c}{2x + a} = \frac{b}{2} \text{이므로}$$

조건 (가)에 의하여 $b = -4$

조건 (나)에 의하여

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)R(x)}{x^2} \text{의 값이 존재하고 } \lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0 \text{이므로}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x)R(x)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \{x^2(2x + a) + (-4x + c)\}(-4x + c)$$

$$= c^2 = 0 \text{에서 } c = 0$$

조건 (나)에 의하여

$$\begin{aligned} Q(0) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)R(x)}{x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\{x^2(2x + a) - 4x\}(-4x)}{x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \{-4x(2x + a) + 16\} = 16 \text{이므로} \end{aligned}$$

$$a = 16$$

$$\text{그러므로 } f(x) = x^2(2x + 16) - 4x$$

$$\text{따라서 } f(1) = 14$$

20. [출제의도] 등비수열을 이용하여 추론하기

조건 (가)에서 $a_5 = a_1 r^4 = 8 > 0$ 이므로

$$r \neq 0 \text{이고 } a_1 > 0$$

r 의 값의 범위에 따른 6개의 수 $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5,$

a_6 의 대소 관계는 다음과 같다.

(i) $r > 0$ 일 때

$$r > 1 \text{이면 } a_1 < a_2 < a_3 < a_4 < a_5 < a_6 \text{이고}$$

$$0 < r < 1 \text{이면 } a_6 < a_5 < a_4 < a_3 < a_2 < a_1$$

이므로 조건 (나)에 의하여

$$a_3 + a_4 = \frac{a_5}{r^2} + \frac{a_5}{r} = \frac{8}{r^2} + \frac{8}{r} = 6$$

$$3r^2 - 4r - 4 = (3r + 2)(r - 2) = 0, \quad r = 2$$

(ii) $-1 < r < 0$ 일 때

$$a_2 < a_4 < a_6 < 0 < a_5 < a_3 < a_1$$

이므로 조건 (나)에 의하여

$$a_5 + a_6 = 8 + 8r = 6, \quad r = -\frac{1}{4}$$

(iii) $r < -1$ 일 때

$$a_6 < a_4 < a_2 < 0 < a_1 < a_3 < a_5 \text{이다.}$$

그런데 $a_1 + a_2 = a_1(1 + r) < 0$ 이므로 조건 (나)를 만족시키도록 하는 실수 r 의 값이 존재하지 않는다.

(i), (ii), (iii)에 의하여 조건을 만족시키도록 하는

$$\text{모든 실수 } r \text{의 값의 합은 } 2 + \left(-\frac{1}{4}\right) = \frac{7}{4}$$

21. [출제의도] 수열의 귀납적 정의를 이용하여 추론하기

조건 (가)에서 $a_1 > 1$ 이고,

$$a_n > 1 \text{이면 } a_{n+1} = \frac{1}{3} a_n \text{이므로}$$

$a_N \leq 1$ 을 만족시키는 자연수 N 이 존재하며

그중 가장 작은 자연수를 $k(k \geq 2)$ 라 하자.

$1 \leq n \leq k-1$ 인 자연수 n 에 대하여 $a_n > 1$ 이고

$$\frac{1}{3} < a_k \leq 1$$

$$a_k = \frac{1}{3} a_{k-1} = \cdots = \left(\frac{1}{3}\right)^{k-1} a_1 \cdots \textcircled{1}$$

$$\text{그러므로 } 3^{k-2} < a_1 \leq 3^{k-1}$$

$$a_{k+1} = -3^{k-1} \times a_k = -a_1 \text{이므로}$$

$$-3^{k-1} \leq a_{k+1} < -3^{k-2}$$

조건 (나)에 의하여

$$a_{2k} = \frac{1}{3} a_{2k-1} = \cdots = \left(\frac{1}{3}\right)^{k-1} a_{k+1}$$

$$\text{그러므로 } a_{2k} = \left(\frac{1}{3}\right)^{k-1} \times (-a_1) = -a_k$$

$$|a_{2k}| = |-a_k| \leq 1 \text{이므로}$$

$$a_{2k+1} = -3^{2k-1} a_{2k} = 3^{2k-1} a_k$$

$$\frac{1}{3} < a_k \leq 1 \text{이므로 } 3^{2k-2} < a_{2k+1} \leq 3^{2k-1}$$

조건 (나)에 의하여

$$a_{4k} = \frac{1}{3} a_{4k-1} = \left(\frac{1}{3}\right)^2 a_{4k-2} = \cdots = \left(\frac{1}{3}\right)^{2k-1} a_{2k+1}$$

$$\text{그러므로 } a_{4k} = \left(\frac{1}{3}\right)^{2k-1} \times 3^{2k-1} a_k = a_k$$

$$|a_{4k}| = |a_k| \leq 1 \text{이므로}$$

$$a_{4k+1} = -3^{4k-1} a_{4k} = -3^{4k-1} a_k$$

$$\frac{1}{3} < a_k \leq 1 \text{이므로 } -3^{4k-1} \leq a_{4k+1} < -3^{4k-2}$$

조건 (나)에 의하여

$$a_{8k} = \frac{1}{3} a_{8k-1} = \left(\frac{1}{3}\right)^2 a_{8k-2} = \cdots = \left(\frac{1}{3}\right)^{4k-1} a_{4k+1}$$

$$\text{그러므로 } a_{8k} = \left(\frac{1}{3}\right)^{4k-1} \times (-3^{4k-1} a_k) = -a_k$$

같은 방법으로 수열 $\{a_n\}$ 의 모든 항 중에서

$$|a_n| \leq 1 \text{인 것을 구하면}$$

$$a_k, a_{2k} = -a_k, a_{4k} = a_k, a_{8k} = -a_k, a_{16k} = a_k, \cdots$$

그러므로

$$n = 2^p k (p \text{는 짝수}) \text{인 경우 } a_n = a_k,$$

$$n = 2^q k (q \text{는 홀수}) \text{인 경우 } a_n = -a_k,$$

$$n \neq 2^m k (m \text{은 음이 아닌 정수}) \text{인 경우 } |a_n| > 1$$

$$a_{16} = -\frac{4}{9} \text{이므로 } a_k = \frac{4}{9} \text{이고 } 16 = 2^q k (q \text{는 홀수})$$

$$16 = 2^4 \text{이므로}$$

조건을 만족시키는 q 의 값은 1 또는 3뿐이다.

$$q = 1 \text{이면 } k = 8 \text{이고 } \textcircled{1} \text{에 의하여 } \frac{4}{9} = \left(\frac{1}{3}\right)^{8-1} a_1,$$

$$a_1 = 2^2 \times 3^5$$

$$q = 3 \text{이면 } k = 2 \text{이고 } \textcircled{1} \text{에 의하여 } \frac{4}{9} = \left(\frac{1}{3}\right)^{2-1} a_1,$$

$$a_1 = 2^2 \times 3^{-1}$$

따라서 조건을 만족시키는 모든 수열 $\{a_n\}$ 의

$$a_1 \text{의 값의 곱은 } (2^2 \times 3^5) \times (2^2 \times 3^{-1}) = 2^4 \times 3^4$$

22. [출제의도] 호도법의 뜻 이해하기

$$\text{주어진 부채꼴의 넓이는 } \frac{1}{2} \times 10 \times 4\pi = 20\pi \text{이므로}$$

$$a = 20$$

23. [출제의도] 거듭제곱근의 정의 이해하기

$(n-4)(n-7)$ 의 n 제곱근 중 실수인 것의 개수가 0이므로 $(n-4)(n-7) < 0$ 이고 n 은 짝수이다.

n 은 $4 < n < 7$ 인 짝수이므로 구하는 n 의 값은 6

24. [출제의도] 순간변화율 이해하기

함수 $f(x)$ 의 $x = 1$ 에서의 순간변화율은

$$\lim_{t \rightarrow 1} \sqrt{t^2 + 8} = 3$$

25. [출제의도] 등차수열의 합 이해하기

등차수열 $\{a_n\}$ 의 공차를 d 라 하자.

$$S_8 = \frac{8(2a_1 + 7d)}{2}, \quad S_4 = \frac{4(2a_1 + 3d)}{2} \text{이므로}$$

$$\frac{8(2a_1 + 7d)}{2} = 2 \times \frac{4(2a_1 + 3d)}{2} - 12 \text{에서}$$

$$16d = -12, \quad d = -\frac{3}{4}$$

$$\text{따라서 } a_1 = a_9 - 8d = 5 - 8 \times \left(-\frac{3}{4}\right) = 11$$

【 다른 풀이 】

등차수열 $\{a_n\}$ 의 공차를 d 라 하자.

$$S_8 - S_4 = a_5 + a_6 + a_7 + a_8 \text{이므로}$$

$$\begin{aligned} S_8 - 2S_4 &= (a_5 + a_6 + a_7 + a_8) - (a_1 + a_2 + a_3 + a_4) \\ &= (a_5 - a_1) + (a_6 - a_2) + (a_7 - a_3) + (a_8 - a_4) \\ &= 4 \times 4d = 16d \end{aligned}$$

$$16d = -12 \text{에서 } d = -\frac{3}{4}$$

$$\text{따라서 } a_1 = a_9 - 8d = 5 - 8 \times \left(-\frac{3}{4}\right) = 11$$

26. [출제의도] 삼각함수의 그래프 이해하기

$$2\sin^2\frac{\pi}{6}x - \cos\frac{\pi}{6}x \leq 1$$

$$2\left(1 - \cos^2\frac{\pi}{6}x\right) - \cos\frac{\pi}{6}x \leq 1$$

$$2\cos^2\frac{\pi}{6}x + \cos\frac{\pi}{6}x - 1 \geq 0$$

$$\left(2\cos\frac{\pi}{6}x - 1\right)\left(\cos\frac{\pi}{6}x + 1\right) \geq 0$$

$$\cos\frac{\pi}{6}x \leq -1 \text{ 또는 } \cos\frac{\pi}{6}x \geq \frac{1}{2}$$

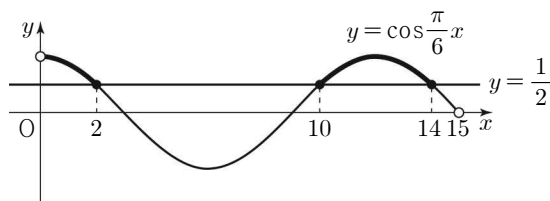
$$\left|\cos\frac{\pi}{6}x\right| \leq 1 \text{이므로}$$

$$0 < x < 15 \text{에서 부등식 } \cos\frac{\pi}{6}x \leq -1 \text{의 해는 } 6 \dots \textcircled{7}$$

$$0 < x < 15 \text{에서 방정식 } \cos\frac{\pi}{6}x = \frac{1}{2} \text{의 해가}$$

$$2, 10, 14 \text{이므로 } 0 < x < 15 \text{에서 함수 } y = \cos\frac{\pi}{6}x \text{의}$$

그래프와 직선 $y = \frac{1}{2}$ 은 그림과 같다.



$$0 < x < 15 \text{에서 부등식 } \cos\frac{\pi}{6}x \geq \frac{1}{2} \text{을 만족시키는}$$

모든 실수 x 의 값의 범위는

$$\text{그림에서 함수 } y = \cos\frac{\pi}{6}x \text{의 그래프가}$$

$$\text{직선 } y = \frac{1}{2} \text{과 만나거나 직선 } y = \frac{1}{2} \text{보다 위쪽에}$$

있는 x 의 값의 범위와 같으므로

$$0 < x \leq 2 \text{ 또는 } 10 \leq x \leq 14 \dots \textcircled{8}$$

⑦, ⑧에 의하여 구하는 모든 자연수 x 의 값의 합은

$$6 + (1 + 2 + 10 + 11 + 12 + 13 + 14) = 69$$

27. [출제의도] 함수의 극한을 활용하여 문제해결하기

$$\overline{PQ} = t^2, \overline{PR} = t^2 + \frac{1}{2},$$

$$\overline{OP} = \sqrt{(t-0)^2 + (t^2-0)^2} = \sqrt{t^4 + t^2}$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \overline{PQ}(\overline{PR} - \overline{OP})$$

$$= \lim_{t \rightarrow \infty} t^2 \left(t^2 + \frac{1}{2} - \sqrt{t^4 + t^2} \right)$$

$$= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t^2 \left(t^2 + \frac{1}{2} - \sqrt{t^4 + t^2} \right) \left(t^2 + \frac{1}{2} + \sqrt{t^4 + t^2} \right)}{t^2 + \frac{1}{2} + \sqrt{t^4 + t^2}}$$

$$= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\frac{t^2}{4}}{t^2 + \frac{1}{2} + \sqrt{t^4 + t^2}}$$

$$= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{4}}{1 + \frac{1}{2t^2} + \sqrt{1 + \frac{1}{t^2}}} = \frac{1}{8}$$

$$\text{따라서 } 72 \times \lim_{t \rightarrow \infty} \overline{PQ}(\overline{PR} - \overline{OP}) = 72 \times \frac{1}{8} = 9$$

28. [출제의도] 수열의 합과 일반항 사이의 관계를 이용하여 추론하기

(i) $n = 1$ 일 때

$$a_1 = \frac{1}{1} = 1 \text{이고, } a_2 = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

$$a_2 + 3 \sum_{k=1}^1 a_k b_k = \frac{3}{2} + 3b_1 = -1 \text{이므로}$$

$$b_1 = \boxed{-\frac{5}{6}}$$

(ii) $n \geq 2$ 일 때

$$\sum_{k=1}^n a_k b_k = -\frac{1+a_{n+1}}{n+2} \text{에서}$$

$$\begin{aligned} a_n b_n &= \sum_{k=1}^n a_k b_k - \sum_{k=1}^{n-1} a_k b_k \\ &= -\frac{1+a_{n+1}}{n+2} - \left(-\frac{1+a_n}{n+1} \right) \\ &= \frac{-(n+1)(1+a_{n+1}) + (n+2)(1+a_n)}{(n+1)(n+2)} \\ &= \frac{-(n+1)a_{n+1} + (n+2)a_n + 1}{(n+1)(n+2)} \\ &= \frac{-(n+1)\left(a_n + \frac{1}{n+1}\right) + (n+2)a_n + 1}{(n+1)(n+2)} \\ &= \frac{a_n}{(n+1)(n+2)} \\ &= a_n \times \boxed{\frac{1}{(n+1)(n+2)}} \end{aligned}$$

$$\text{이고 } a_n \neq 0 \text{이므로 } b_n = \boxed{\frac{1}{(n+1)(n+2)}}$$

(i), (ii)에 의하여

$$b_n = \begin{cases} \boxed{-\frac{5}{6}} & (n=1) \\ \boxed{\frac{1}{(n+1)(n+2)}} & (n \geq 2) \end{cases}$$

따라서

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{10} b_k &= b_1 + \sum_{k=2}^{10} b_k \\ &= -\frac{5}{6} + \sum_{k=2}^{10} \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2} \right) \\ &= -\frac{5}{6} + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{12} \right) = \boxed{-\frac{7}{12}} \end{aligned}$$

$$p = -\frac{5}{6}, q = -\frac{7}{12}, f(n) = \frac{1}{(n+1)(n+2)}$$

$$\text{따라서 } \frac{p \times q}{f(7)} = 35$$

29. [출제의도] 삼각함수의 그래프를 이용하여 추론하기

곡선 $y = f(x)$ 가 직선 $x = 2$ 에 대하여 대칭이므로

점 B의 x 좌표를 $b(0 < b < 2)$ 라 하면

점 C의 x 좌표는 $4 - b$ 이다.

그러므로 점 B의 좌표는 $B(b, 1)$,

점 C의 좌표는 $C(4 - b, 1)$

$$f(b) = k \sin \frac{\pi}{4} b = 1 \text{에서 } \sin \frac{\pi}{4} b = \frac{1}{k} \dots \textcircled{1}$$

점 A의 x 좌표를 $a(0 < a < 4)$ 라 하자.

$$k \sin \frac{\pi}{4} a = \tan \frac{\pi}{4} a = \frac{\sin \frac{\pi}{4} a}{\cos \frac{\pi}{4} a} \text{에서}$$

$$\sin \frac{\pi}{4} a \neq 0 \text{이므로 } \cos \frac{\pi}{4} a = \frac{1}{k}$$

$$\textcircled{1} \text{에서 } \cos \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} b \right) = \sin \frac{\pi}{4} b = \frac{1}{k} \text{이고}$$

$0 < x < \pi$ 에서 함수 $y = \cos x$ 의 그래프와

직선 $y = \frac{1}{k}$ 이 만나는 점의 개수가 1이며

$$0 < \frac{\pi}{4} a < \pi, 0 < \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} b < \frac{\pi}{2} \text{이므로}$$

$$\frac{\pi}{4} a = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} b, a = 2 - b$$

$$\text{또한 } f(a) = k \sin \frac{\pi}{4} a = k \sqrt{1 - \cos^2 \frac{\pi}{4} a} = \sqrt{k^2 - 1}$$

이므로 점 A의 좌표는 $A(2 - b, \sqrt{k^2 - 1})$

직선 AC의 기울기가 -2 이므로

$$\frac{1 - \sqrt{k^2 - 1}}{(4 - b) - (2 - b)} = -2 \text{에서 } \sqrt{k^2 - 1} = 5, k^2 = 26$$

$A(2 - b, 5)$, $B(b, 1)$ 에서 선분 AB의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{(2 - b) + b}{2}, \frac{5 + 1}{2} \right) \text{이므로 } p = 1, q = 3$$

$$\text{따라서 } k^2 + p + q = 26 + 1 + 3 = 30$$

30. [출제의도] 지수함수와 로그함수의 그래프를 이용하여 추론하기

조건 (가)에 의하여 $q - p = d(d > 0)$ 이라 하면

$$q = p + d, r = p + 2d, s = p + 3d$$

점 A를 지나고 x 축에 평행한 직선과

점 B를 지나고 y 축에 평행한 직선이 만나는 점을

H_1 이라 하고,

점 C를 지나고 x 축에 평행한 직선과

점 D를 지나고 y 축에 평행한 직선이 만나는 점을

H_2 라 하자.

네 점 A, B, C, D가 한 직선 위에 있으므로

삼각형 AH_1B 와 삼각형 CH_2D 는 서로 닮음이고

조건 (나)에 의하여 닮음비는 $1:2$ 이다.

$2\overline{AH_1} = \overline{CH_2}$ 에서 두 점 C, D의 x 좌표의 차가 $2d$

$2\overline{H_1B} = \overline{H_2D}$ 에서 두 점 A, B의 y 좌표의 차가 $\frac{d}{2}$

네 점 A, B, C, D를 지나는 직선의 기울기는 $\frac{1}{2}$ 이다.

두 점 A, B는 곡선 $y = 4^{x-k}$ 위의 점이므로

두 점 A, B의 좌표는 각각

$$A(p, 4^{p-k}), B(p+d, 4^{p+d-k})$$

$$4^{p+d-k} - 4^{p-k} = 4^{p-k}(4^d - 1) = \frac{d}{2} \dots \textcircled{1}$$

두 점 C, D는 곡선 $y = \log_4 x + k$ 위의 점이므로

두 점 C, D의 좌표는 각각

$$C(4^{p+2d-k}, p+2d), D(4^{p+3d-k}, p+3d)$$

$$4^{p+3d-k} - 4^{p+2d-k} = 4^{p+2d-k}(4^d - 1) = 2d \dots \textcircled{2}$$

두 식 ①, ②을 연립하여 정리하면 $4^{2d} = 4$, $d = \frac{1}{2}$

$$\textcircled{1} \text{에서 } 4^{p-k} \left(4^{\frac{1}{2}} - 1 \right) = \frac{1}{4}$$

$$4^{p-k} = \frac{1}{4} \text{이므로 점 A의 } y \text{좌표는 } \frac{1}{4} \text{이고}$$

$$4^{p+2d-k} = 1 \text{이므로 점 C의 } x \text{좌표는 } 1 \text{이다.}$$

이제 네 점 A, B, C, D의 좌표를 각각 나타내면

$$A\left(p, \frac{1}{4}\right), B\left(p + \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), C(1, p+1), D\left(2, p + \frac{3}{2}\right)$$

직선 AC의 기울기가 $\frac{1}{2}$ 이므로

$$\frac{(p+1) - \frac{1}{4}}{1 - p} = \frac{1}{2} \text{에서 } p = -\frac{1}{6}$$

$$\overline{OA}^2 = \left(-\frac{1}{6}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{13}{144}$$

$$\text{따라서 } m = 144, n = 13 \text{이므로 } m + n = 157$$